Preparação para o Exame Final Nacional

exame

Matemática A

12.º ano

Maria Augusta Ferreira Neves | Luís Guerreiro

Porto Editora

Índice

Os temas ou exercícios referenciados com o símbolo * remetem para conteúdos que vão além das Aprendizagens Essenciais (AE), ou porque não fazem parte dos conteúdos destas ou pelo grau de dificuldade dos exercícios.

Unidade 4. Funções

Unidade 5. Trigonometria

Índice

1. Conjunto dos números complexos. Definições

Os **números complexos** constituem um conjunto, $\mathbb{C}$, que contém o conjunto dos números reais $(\mathbb{C} \subset \mathbb{R})$ e onde estão definidas duas operações, **adição** e **multiplicação**, que são extensões das operações homónimas em $\mathbb{R}$. Como tal, verificam as propriedades comutativa e associativa e a multiplicação é distributiva relativamente à adição.

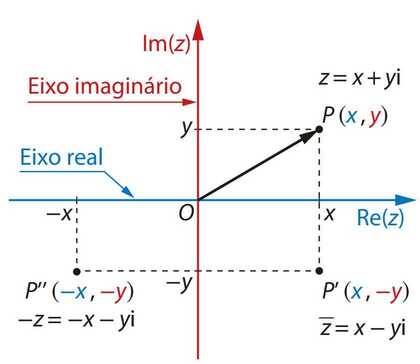
- Existe um número complexo, não real, que se representa pela letra i e se designa por **unidade imaginária** tal que $i^2 = -1$.
- Dado um número complexo z existem dois únicos números reais a e b tais que $z = a + bi$.
- $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ é a **forma algébrica** do número complexo z.
- Dado o número complexo $z = a + bi$:
  - a é a **parte real** de $z \longrightarrow \operatorname{Re}(z) = a$
  - b é a **parte imaginária** de $z \longrightarrow \operatorname{Im}(z) = b$
  - z é um **número real** $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow b = 0$
  - z é um **imaginário puro** $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$
  - o simétrico de z é o número complexo $-z = -a - bi$;
  - o conjugado de z é o número complexo $\bar{z} = a - bi$;
    $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \wedge \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$
- Igualdade de números complexos
  $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$

2. Representação geométrica de um número complexo

Todo o número complexo $z = x + yi$, pode ser representado geometricamente no plano, munido de um referencial ortonormado direto, pelo ponto P de coordenadas (x, y).

Neste contexto:

- o plano designa-se por **plano complexo** ou **plano de Argand**;
- o ponto $P(x, y)$ designa-se por **afixo** do número complexo $z = x + yi$;
- o vetor $\overrightarrow{OP}$ designa-se por **afixo vetorial** do número complexo $z = x + yi$.



3. Operações com números complexos

Adição e multiplicação de números complexos

- $(a+b\,\mathrm{i})+(c+d\,\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\,\mathrm{i}$
- $(a+b\,\mathrm{i})\times(c+d\,\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\,\mathrm{i}$

Potências de base i e expoente $n\in\mathbb{N}_0$

- $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}^r$ sendo r o resto da divisão de n por 4.

Exemplo 1 Operações em $\mathbb{C}$

Calcule, apresentando o resultado na forma algébrica.

1.1. $(3+\mathrm{i})-(2-5\mathrm{i})$ **1.2.** $(4-2\mathrm{i})\times\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

1.3. $\left(2\,\mathrm{i}^{55}-3\,\mathrm{i}^{26}\right)\times\left(4\,\mathrm{i}^{41}+\mathrm{i}^{92}\right)$

Resolução

1.1. $(3+\mathrm{i})-(2-5\mathrm{i})=3+\mathrm{i}-2+5\mathrm{i}=1+6\mathrm{i}$

1.2. $$(4-2\mathrm{i})\times\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=4\times\frac{5}{2}-4\times\frac{1}{2}\mathrm{i}-2\times\frac{5}{2}\mathrm{i}+2\times\frac{1}{2}\mathrm{i}^2=$$
$$=10-2\mathrm{i}-5\mathrm{i}+1\times(-1)=9-7\mathrm{i}$$

1.3. $$\left(2\,\mathrm{i}^{55}-3\,\mathrm{i}^{26}\right)\times\left(4\,\mathrm{i}^{41}+\mathrm{i}^{92}\right)=$$
$$=\left(2\,\mathrm{i}^{3}-3\,\mathrm{i}^{2}\right)\times\left(4\,\mathrm{i}^{1}+\mathrm{i}^{0}\right)=$$
$$=(-2\mathrm{i}+3)\times(4\mathrm{i}+1)=$$
$$=-8\,\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}+12\mathrm{i}+3=8+3+10\mathrm{i}=$$
$$=11+10\mathrm{i}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 4 \\ \hline 3 & 13 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 26 & 4 \\ \hline 2 & 6 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 41 & 4 \\ \hline 1 & 10 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 92 & 4 \\ \hline 0 & 23 \end{array}$$

Verifica 1

Calcule, apresentando o resultado na forma algébrica.

1.1. $(1+2\mathrm{i})-(4-4\mathrm{i})$

1.2. $2\times3\,\mathrm{i}^{15}-3\mathrm{i}$

1.3. $(5-3\mathrm{i})\times\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)$

1.4. $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\mathrm{i}\right)^2$

1.5. $\left(5\,\mathrm{i}^{17}-2\,\mathrm{i}^{14}\right)(1+\mathrm{i})$

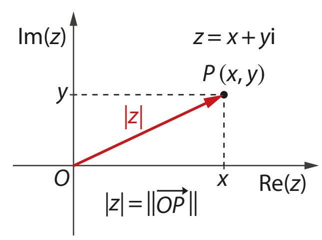
1.6. $\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}\,\mathrm{i}^{51}$

1.7. i^{4n+1}, $n\in\mathbb{N}$

1.8. $2\,\mathrm{i}^{4n+2}+3\,\mathrm{i}^{4n+3}$, $n\in\mathbb{N}$

Módulo de um número complexo

Dado um número complexo $z=x+yi$, o módulo de z representa-se por $|z|$ e é dado por $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.



Módulo e conjugado de um número complexo: propriedades

- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
- $\overline{z\times w}=\overline{z}\times\overline{w}$
- $\overline{\overline{z}}=z$
- $\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$
- $z\in\mathbb{R}$ se e somente se $z=\overline{z}$.
- Se $z\neq0$, z é um imaginário puro se e somente se $z=-\overline{z}$.
- $|z|=|\overline{z}|$
- $|z|^2=z\times\overline{z}$
- $|z\times w|=|z|\times|w|$
- $|z+w|\leqslant|z|+|w|$
- Dados os números complexos z_1 e z_2, de afixos A e B, respetivamente, $\overline{AB}=|z_1-z_2|$.

Divisão de números complexos

- $\frac{w}{z}=\frac{w\times\overline{z}}{z\times\overline{z}}=\frac{w\times\overline{z}}{|z|^2}\qquad(z\neq0)$
- $\left|\frac{w}{z}\right|=\frac{|w|}{|z|}$ e $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}=\frac{\overline{w}}{\overline{z}}\qquad(z\neq0)$

Exemplo 2 Operações em $\mathbb{C}$

Calcule $\dfrac{(2-4i)(2+3i)}{1+i}$ e apresente o resultado na forma algébrica.

Resolução

2.1. $\dfrac{(2-4i)(2+3i)}{1+i} = \dfrac{4+6i-8i-12i^2}{1+i} =$ | $-12i^2 = 12$

$= \dfrac{(16-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

Para dividir dois números complexos, multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

$= \dfrac{16-16i-2i+2i^2}{1^2-\cancel{i}+\cancel{i}-i^2} =$

$= \dfrac{14-18i}{1-(-1)} = \dfrac{14-18i}{2} = 7-9i$

Verifica 2

Calcule e apresente o resultado na forma algébrica.

2.1. $\dfrac{2-i^{17}}{(3-4i)(1-i)}$

2.2. $\dfrac{1}{2+i} - \dfrac{3}{1-2i}$

2.3. $\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^2} - \dfrac{1}{i} + \dfrac{20-15i}{1+2i}$

2.4. $\dfrac{\left(1-i^3\right)^3}{1+i^{31}} + 2 - \dfrac{(2+2i)^4}{8i^{101}}$

2.5. $\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i}\right)^2$

Raiz quadrada de um número real negativo

Se $a \in \mathbb{R}^+$, $\left(i\sqrt{a}\right)^2 = i^2 \times \left(\sqrt{a}\right)^2 = -a$, $\left(-i\sqrt{a}\right)^2 = (-i)^2 \times \left(\sqrt{a}\right)^2 = -a$, então $\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}$.

Por exemplo:

- $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$
- $-\sqrt{-16} = -4i$
- $\pm\sqrt{-7} = \pm\sqrt{7}\,i$

Exemplo 3 Equações em $\mathbb{C}$

Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações seguintes.

3.1. $x^2 - 2x + 10 = 0$ **3.2.** $z^2 + 4iz - 13 = 0$

3.3. $z + 2i\bar{z} = 3i$

Resolução

3.1. $x^2 - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm 6i}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1+3i \vee x = 1-3i$

$S = \{1+3i,\ 1-3i\}$

Em $\mathbb{C}$ todas as equações do 2.º grau são possíveis. As soluções de uma equação do 2.º grau de coeficientes reais são sempre números complexos conjugados.

3.2. $z^2 + 4iz - 13 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-4i \pm \sqrt{(4i)^2+52}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-4i \pm \sqrt{-16+52}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{-4i \pm 6}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 3-2i \vee z = -3-2i$

$S = \{3-2i,\ -3-2i\}$

3.3. $z + 2i\bar{z} = 3i \Leftrightarrow (x+yi) + 2i(x-yi) = 3i \Leftrightarrow$ | Seja $z = x+yi$

$\Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2yi^2 = 3i \Leftrightarrow (x+2y) + (2x+y)i = 0 + 3i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ -4y+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2-i$

$S = \{2-i\}$

Verifica 3

Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações.

3.1. $(2-i)z = 5i$

3.2. $z^2 - 6z + 13 = 0$

3.3. $z^2 - 10zi - 26 = 0$

3.4. $z^3 + z = 0$

3.5. $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$

3.6. $2iz = 1 - \bar{z}$

Exemplo 4 Determinar os zeros de um polinómio

Sabe-se que i é um zero do polinómio complexo:

$$A(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$$

Aplicando a propriedade:

> "Se z_0 é um zero de um polinómio $P(z)$ de coeficientes reais então também $\bar{z}_0$ é um zero de $P(z)$."

determine os outros zeros do polinómio e decomponha-o em fatores do 1.° grau em z.

Resolução

Como $A(z)$ é um polinómio de coeficientes reais, se i é zero do polinómio também $-\mathrm{i}$ é zero de $A(z)$.

Aplicando a Regra de Ruffini, vem:

$$A(z) = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})\left(z^2 - 2z + 5\right)$$

	1	-2	6	-2	5
i		i	$-2\mathrm{i}-1$	$2+5\mathrm{i}$	-5
	1	$-2+\mathrm{i}$	$-2\mathrm{i}+5$	$5\mathrm{i}$	0
$-\mathrm{i}$		$-\mathrm{i}$	$2\mathrm{i}$	$-5\mathrm{i}$	
	1	-2	5	0	

Como $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \Leftrightarrow z = 1 - 2\mathrm{i} \vee z = 1 + 2\mathrm{i}$

os zeros do polinómio $A(z)$ são $-\mathrm{i}$, i, $1 + 2\mathrm{i}$ e $1 - 2\mathrm{i}$.

Logo, $A(z) = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(z - 1 - 2\mathrm{i})(z - 1 + 2\mathrm{i})$.

Verifica 4

Considere o polinómio:

$$z^3 - z + 6$$

Determine analiticamente os seus zeros em $\mathbb{C}$, sabendo que um deles é -2.

Exemplo 5 Números imaginários puros e números reais

Considere o número complexo $z = \dfrac{k + \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Determine k de forma que:

5.1. z seja imaginário puro;

5.2. z seja um número real.

Resolução

$$z = \frac{k+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(k+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{2k - k\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - \mathrm{i}^2}{4 - \mathrm{i}^2} = \frac{(2k+1) + (2-k)\mathrm{i}}{5} =$$

$$= \frac{2k+1}{5} + \frac{2-k}{5}\mathrm{i}$$

5.1. z é imaginário puro $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+1}{5} = 0 \wedge \frac{2-k}{5} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k + 1 = 0 \wedge 2 - k \neq 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

5.2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-k}{5} = 0 \Leftrightarrow k = 2$

Verifica 5

5.1. Determine $a \in \mathbb{R}$ sabendo que o número complexo $\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ é um imaginário puro.

5.2. Determine $a \in \mathbb{R}$ sabendo que $\dfrac{2 + a\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$ é um imaginário puro.

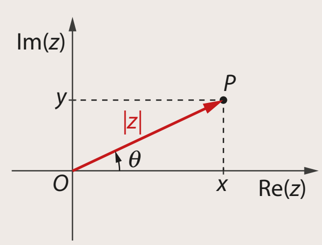
4. Forma trigonométrica de um número complexo

Argumento de um número complexo

Seja P o afixo de um número complexo $z = x + y\mathrm{i}$.

Designa-se por **argumento de z** e representa-se por $\arg(z)$ qualquer uma das amplitudes do ângulo θ formado pelo semieixo real positivo e pela semirreta $\dot{O}P$.

O argumento de z que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ chama-se **argumento principal** de z e representa-se por $\operatorname{Arg}(z)$.



Número complexo unitário

- Um número complexo z diz-se unitário se $|z| = 1$.
- Se θ é um dos argumentos de um número complexo unitário z então $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
- O número complexo unitário $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ representa-se por $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, expressão designada por **exponencial complexa de** $\mathrm{i}\theta$. Portanto, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (Fórmula de Euler).

Forma trigonométrica de um número complexo

Todo o número complexo z não nulo que admite θ como um dos seus argumentos pode ser escrito na forma $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ que se designa por **forma trigonométrica** ou **forma polar** de z.

Escrever um número complexo $z = x + y\mathrm{i}$ na forma trigonométrica corresponde a determinar $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e um argumento θ partindo de $\frac{y}{|z|} = \sin\theta$, $\frac{x}{|z|} = \cos\theta$ ou, se $x \neq 0$, $\frac{y}{x} = \tan\theta$.

Exemplo 6 Representar na forma trigonométrica

Represente na forma trigonométrica.

6.1. $z_1 = 1$

6.2. $z_2 = -2$

6.3. $z_3 = -2\mathrm{i}$

6.4. $z_4 = \mathrm{i}$

Resolução

É imediato indicar um argumento $\left(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi\right)$ e o módulo dos números reais ou dos imaginários puros.

6.1. $z_1 = 1$; $|z_1| = |1| = 1$ e $\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(1) = 0$

$z_1 = 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}$

6.2. $z_2 = -2$; $|z_2| = |-2| = 2$ e $\operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{Arg}(-2) = \pi$

$z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

6.3. $z_3 = -2\mathrm{i}$; $|z_3| = |-2\mathrm{i}| = 2$ e $\operatorname{Arg}(z_3) = \operatorname{Arg}(-2\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$

$z_1 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\times\frac{\pi}{2}}$

6.4. $z_4 = \mathrm{i}$; $|z_4| = |\mathrm{i}| = 1$ e $\operatorname{Arg}(z_4) = \operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$

$z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times\frac{\pi}{2}}$

Verifica 6

Escreva na forma trigonométrica.

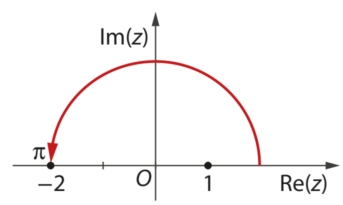
6.1. $z_1 = -3$

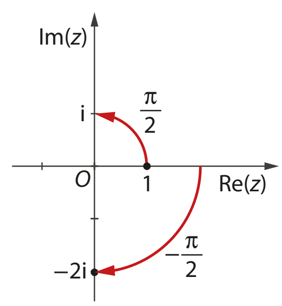
6.2. $z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

6.3. $z_3 = -2\mathrm{i}$

6.4. $z_4 = 3$

6.5. $z_5 = -1$





Exemplo 7 Representar na forma trigonométrica

Represente na forma trigonométrica os números complexos seguintes.

7.1. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

7.2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

7.3. $z_3 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

Verifica 7

Escreva na forma trigonométrica:

7.1. $z_1 = 1 + \mathrm{i}$

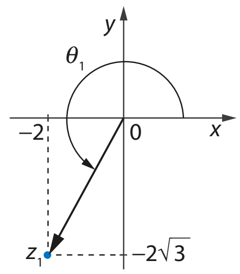
7.2. $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

(continua)

Resolução

7.1. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i\,;\ |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

Seja θ_1 um argumento de z_1.

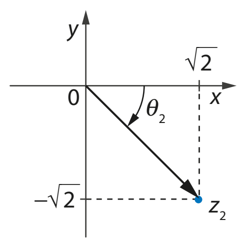


$$\begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \\ \theta_1 \in 3.^\circ\text{Q}. \end{cases} \implies -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \text{ é um argumento de } z_1.$$

$z_1 = 4\,e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

7.2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\,;\ |z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ_2 um argumento de z_2.

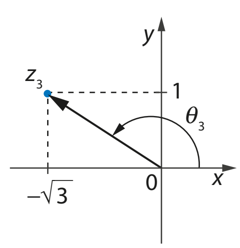


$$\begin{cases} \tan\theta_2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \\ \theta_2 \in 4.^\circ\text{Q}. \end{cases} \implies -\frac{\pi}{4} \text{ é um argumento de } z_2.$$

$z_2 = 2\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

7.3. $z_3 = -\sqrt{3} + i\,;\ |z_3| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

Seja θ_3 um argumento de z_3.



$$\begin{cases} \tan\theta_3 = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta_3 \in 2.^\circ\text{Q}. \end{cases} \implies \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ é um argumento de } z_3.$$

$z_3 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Verifica 7 (continuação)

7.3. $z_3 = -2 - 2i$

7.4. $z_4 = 3\sqrt{3} - 3i$

7.5. $z_5 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

7.6. $z_6 = -4\sqrt{3} + 4i$

7.7. $z_7 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$

α	$\tan\alpha$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$

Exemplo 8 Escrever na forma algébrica

Escreva na forma algébrica os números complexos.

8.1. $z_1 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **8.2.** $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

8.3. $z_3 = 3\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$ **8.4.** $z_4 = 7\,e^{i\pi}$

8.5. $z_5 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

Resolução

8.1. $z_1 = \underset{(2.º\ Q)}{2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}} = 2\left(\underset{-}{\cos\frac{5\pi}{6}} + i\underset{+}{\sin\frac{5\pi}{6}}\right) =$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

8.2. $z_2 = \underset{(3.º\ Q)}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt{2}\left(\underset{-}{\cos\frac{5\pi}{4}} + i\underset{-}{\sin\frac{5\pi}{4}}\right) =$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

8.3. $z_3 = \underset{(4.º\ Q)}{3\,e^{i\frac{5\pi}{3}}} = 3\left(\underset{+}{\cos\frac{5\pi}{3}} + i\underset{-}{\sin\frac{5\pi}{3}}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

8.4. $z_4 = 7\,e^{i\pi} = 7\,(\cos\pi + i\sin\pi) = 7\,(-1 + 0i) = -7$

8.5. $z_5 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$

Verifica 8

Escreva na forma algébrica.

8.1. $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

8.2. $z_2 = 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

8.3. $z_3 = 2\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$

8.4. $z_4 = 3\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

8.5. $z_5 = 3\,e^{i0}$

8.6. $z_6 = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Conjugado na forma trigonométrica

Forma algébrica:

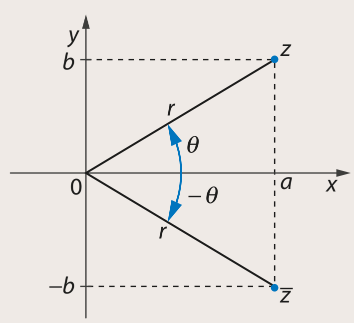
$z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$

Forma trigonométrica:

$z = r\,e^{i\theta}$

$\bar{z} = r\,e^{i(-\theta)}$



O afixo de $\bar{z}$, conjugado de z, é a imagem do afixo de z pela reflexão de eixo real.

Simétrico na forma trigonométrica

Forma algébrica:

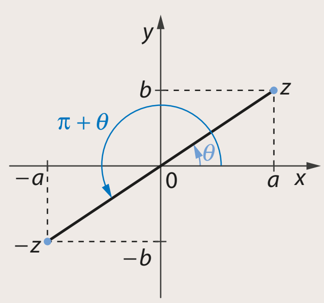
$z = a + bi$

$-z = -a - bi$

Forma trigonométrica:

$z = r\,e^{i\theta}$

$-z = r\,e^{i(\pi + \theta)}$



O afixo de $-z$ é a imagem do afixo de z pela reflexão central de centro O.

Igualdade de números complexos na forma trigonométrica

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1|e^{i\theta_1} = |z_2|e^{i\theta_1} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

Operações na forma trigonométrica

Sejam $z = re^{i\theta}$, $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$.

Multiplicação: $z_1 \times z_2 = \left(r_1e^{i\theta_1}\right) \times \left(r_2e^{i\theta_2}\right) = (r_1 \times r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ $\quad (z_2 \neq 0)$

Potenciação: $z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ **(Fórmula de De Moivre)**

Exemplo 9 Operações com complexos

Determine o módulo e o argumento do número complexo:

$$z = \frac{(1-\sqrt{3}\,i)^3 \times 4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{(1-i)^8 - 2\times(2i)^3}$$

Resolução

Vamos escrever z na forma trigonométrica:

$$z = \frac{(1-\sqrt{3}\,i)^3 \times 4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{(1-i)^8 - 2\times(2i)^3} =$$

$$= \frac{\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^3 \times 4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^8 - 2\times 2^3 \times i^3} =$$

$$= \frac{2^3e^{i\left(-3\times\frac{\pi}{3}\right)} \times 4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{(\sqrt{2})^8e^{i\left(-8\times\frac{\pi}{4}\right)} - 2\times 8\times(-i)} =$$

$$= \frac{8e^{i(-\pi)} \times 4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{16e^{i(-2\pi)} + 16i} =$$

$$= \frac{(8\times 4)e^{i\left(-\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}}{16e^{i\times 0} + 16i} = \frac{32e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{16+16i} =$$

$$= \frac{32e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{16(1+i)} = \frac{2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{7\pi}{12}\right)}$$

$u = 1-\sqrt{3}\,i$; $\theta = \text{Arg}(u)$

$|u| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 4.^{\text{o}}\text{ Q} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$1-\sqrt{3}\,i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$w = 1-i$; $\theta = \text{Arg}(w)$

$|w| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ \theta \in 4.^{\text{o}}\text{ Q} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$1-i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$1+i = \overline{1-i} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta}$, $n \in \mathbb{N}$

$r_1e^{i\theta_1} \times r_2e^{i\theta_2} = (r_1\times r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Temos, portanto, $|z| = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}(z) = -\dfrac{7\pi}{12}$.

Verifica 9

Sendo:

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ e } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

calcule, apresentando o resultado na forma algébrica.

9.1. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3$

9.2. $\dfrac{(z_1)^2 \times (z_2)^3}{64}$

Verifica 10

Determine o módulo e o argumento do número complexo.

$$z = \frac{(1+\sqrt{3}\,i)^3 - \left(1+e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^5}{e^{i\frac{\pi}{3}} + i^6}$$

Verifica 11

11.1. Justifique que

$$\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7} = e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$$

11.2. Escreva na forma trigonométrica o número complexo.

$$z = \frac{20i^{14} + (4-2\sqrt{3}\,i)^2 - \left(2e^{i\frac{\pi}{15}}\right)^5}{\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}}$$

Exemplo 10 Números reais e números imaginários puros

Considere os números complexos

$$z_1 = \sqrt{3} + \frac{1}{\mathrm{i}} \text{ e } z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \text{ , com } -\pi < \alpha \leqslant \pi \, .$$

10.1. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual $(z_1)^n$ é um número imaginário puro.

10.2. Determine α de modo que $\dfrac{(z_1)^2}{\overline{z_2}}$ seja um número real negativo.

Resolução

10.1. $z_1 = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\mathrm{i}} = \sqrt{3} + \dfrac{1 \times (-\mathrm{i})}{\mathrm{i} \times (-\mathrm{i})} =$

$= \sqrt{3} + \dfrac{-\mathrm{i}}{1} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

$\sqrt{3} - \mathrm{i} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$r = \sqrt{3+1} = 2$

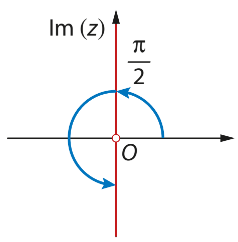
$\tan\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4.^\text{o}\,\mathrm{Q}$

$\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

$z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$(z_1)^n = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{n\pi}{6}\right)}$

$(z_1)^n$ é um imaginário puro se, e só se,



$-\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{n}{6} = \dfrac{1}{2} + k \; , \; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = -3 + 6k \; , \; k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o menor valor natural de n para o qual $(z_1)^n$ é um imaginário puro é $n = -3 + 6 \times 1 = 3$.

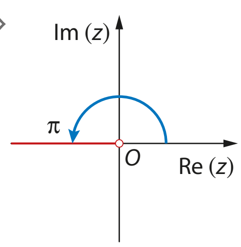
10.2. $\dfrac{(z_1)^2}{\overline{z_2}} = \dfrac{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2}{\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}} = \dfrac{2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-2\times\frac{\pi}{6}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\alpha)}} =$

$= \dfrac{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\alpha)}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$

$\dfrac{(z_1)^2}{\overline{z_2}} \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3} + \alpha = \pi + 2k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}$



Para $k = -1$ obtemos $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$, que é o único valor de α que pertence ao intervalo $]-\pi \, , \, \pi]$ para o qual $\dfrac{(z_1)^2}{\overline{z_2}} \in \mathbb{R}^-$.

Verifica 12

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere
$z = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ e $w = \sqrt{3}z - \mathrm{i}\overline{z}$

12.1. Mostre que, qualquer que seja o número inteiro k,
$$z^k + z^{-k} = 2\cos(k\alpha)$$

12.2. Determine os valores de α pertencentes ao intervalo $]-\pi \, , \, \pi]$, para os quais o número complexo w é um número imaginário puro.

Verifica 13

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere
$$z = \frac{\mathrm{i}^{11}(1-\mathrm{i})^4}{2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$$

Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual z^n é um número real negativo.

Questões tipo exame

Questões resolvidas

20 Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{8}$.

Qual poderá ser um argumento do simétrico de z?

(A) $\frac{15\pi}{8}$ **(B)** $-\frac{7\pi}{8}$ **(C)** $\frac{7\pi}{8}$ **(D)** $\frac{17\pi}{8}$

Resolução

$z = r\,e^{i\frac{\pi}{8}}$

$-z = -r\,e^{i\frac{\pi}{8}} =$ $\quad -1 = e^{i\pi}$

$= e^{i\pi} \times r\,e^{i\frac{\pi}{8}} =$

$= r\,e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)}$

$= r\,e^{i\frac{9\pi}{8}}$

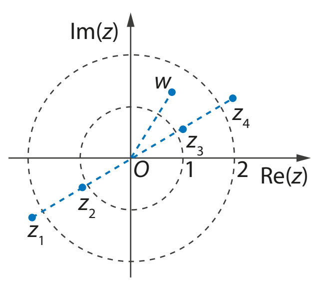
$\frac{9\pi}{8}$ é um argumento de $-z$.

Logo, $\frac{9\pi}{8} - 2\pi = -\frac{7\pi}{8}$ também é um argumento de $-z$.

Resposta: (B)

21 Na figura, estão representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4.

Qual é o número complexo que pode ser igual a $i \times |w| \times \overline{w}$?



(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Resolução

Seja $w = \rho\,e^{i\theta}$ e $z = i \times |w| \times \overline{w}$.

Observando a representação geométrica de w podemos concluir que $1 < \rho < 2$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$z = i \times |w| \times \overline{w} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho \times \rho\,e^{i(-\theta)} = \rho^2\,e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

Se $\rho > 1$, terá de ser $\rho^2 > \rho$ (o módulo de z é maior do que o módulo de w).

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ temos que $0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$, ou seja,

$0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$.

Portanto, apenas z_4 pode ser igual a $i \times |w| \times \overline{w}$.

Resposta: (D)

Questões propostas

25 Seja z um número complexo de argumento $\frac{13\pi}{7}$.

Indique um argumento de $-\overline{z}$, simétrico do conjugado de z.

(A) $\frac{8\pi}{7}$ **(B)** $\frac{\pi}{7}$

(C) $\frac{6\pi}{7}$ **(D)** $-\frac{\pi}{7}$

26 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3\,e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Qual é o valor de $\frac{1}{z^2}$?

(A) $\frac{1}{9}\,e^{i\frac{7}{2\pi}}$ **(B)** $\frac{1}{9}\,e^{i\left(-\frac{2\pi}{7}\right)}$

(C) $\frac{1}{9}\,e^{i\frac{\pi}{49}}$ **(D)** $\frac{1}{6}\,e^{i\left(\frac{7}{2\pi}\right)}$

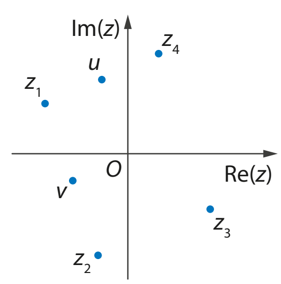
27 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\theta}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

Qual dos seguintes números complexos pode ser uma representação trigonométrica de iz^2?

(A) $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **(B)** $e^{i\frac{5\pi}{4}}$

(C) $e^{i\frac{7\pi}{4}}$ **(D)** $e^{i\frac{\pi}{4}}$

28 Na figura estão representados, no plano complexo, os afixos de seis números complexos: u, v, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual é o número complexo que pode ser igual a $u - v$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Questões resolvidas

22 Considere, no plano complexo, três pontos, P, A e B, tais que:

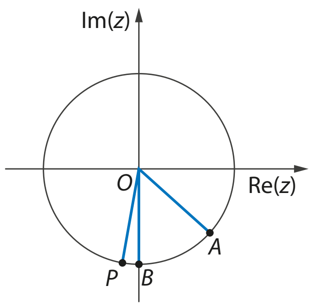
- o ponto A é o afixo do número complexo $\sqrt{5} - 2\mathrm{i}$;
- o ponto B pertence à parte negativa do eixo imaginário;
- $\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{OB}$ (O é a origem do referencial);
- o ponto P pertence ao terceiro quadrante e o ângulo POB tem 10 graus de amplitude.

Qual dos seguintes números complexos tem como afixo o ponto P?

(A) $2\sqrt{5}\,e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ **(B)** $2\sqrt{5}\,e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{9}}$

(C) $3e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ **(D)** $3e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{9}}$

Resolução



A é o afixo do número complexo $z = \sqrt{5} - 2\mathrm{i}$.

Seja w o número complexo cujo afixo é P.

$\overline{OP} = \overline{OB} = \overline{OA} = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+5} = 3$

Logo, $|w| = 3$.

$180° \text{ —— } \pi \text{ rad}$
$10° \text{ —— } x$

$x = \frac{10 \times \pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$

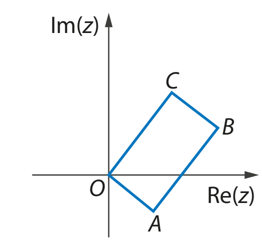
O ângulo POB tem $\frac{\pi}{18}$ rad de amplitude.

Logo, como $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{18} = \frac{13\pi}{9}$, um argumento de w é $\frac{13\pi}{9}$.

Portanto, $w = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{9}}$.

Resposta: (D)

23 Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos A, B e C.



Sabe-se que $[OABC]$ é um retângulo e que A e C são os afixos dos números complexos w e z, respetivamente.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $z = \mathrm{i}w$

(B) $\frac{z}{w}$ é um número real.

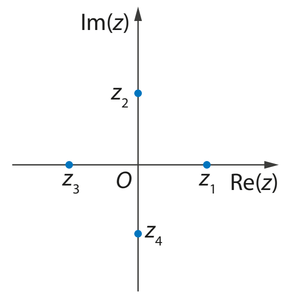
(C) $|z| = 2|w|$

(D) $|z + w| = |z - w|$

Questões propostas

29 Seja w um número complexo diferente de 0, cujo afixo, no plano complexo, pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

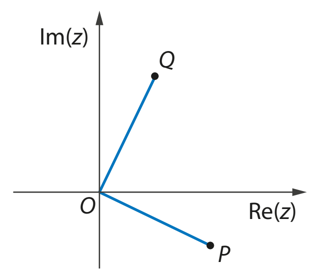
Na figura estão representados, no plano complexo, os afixos de quatro números complexos: z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual deles pode ser igual a $w \times (-w)$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

30 Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos P e Q, afixos de dois números complexos z e w, respetivamente.



Sabe-se que o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e retângulo em O.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $z^2 - w^2 = 0$

(B) $z^2 + w^2 = 0$

(C) $|z - w| > |z + w|$

(D) $|z + w| = |z| + |w|$

31 Seja $z = \frac{\mathrm{i}}{e^{\mathrm{i}\alpha}}$ com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de z?

(A) $e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ **(B)** $e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

(C) $e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$ **(D)** $e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$

Avaliação

1 Seja z um número complexo de argumento $\frac{6\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do número complexo $-\bar{z}$?

(A) $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{4\pi}{5}$

(C) $\frac{9\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{4\pi}{5}$

2 Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do número complexo $\mathrm{i}\,\bar{z}$?

(A) $\frac{3\pi}{10}$ **(B)** $-\frac{\pi}{5}$

(C) $\frac{7\pi}{10}$ **(D)** $\frac{13\pi}{10}$

3 Considere o número complexo $z = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$.

Um argumento de $\overline{-z}$ é:

(A) $-\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{\pi}{5}$

(C) $\frac{4\pi}{5}$ **(D)** $\frac{6\pi}{5}$

4 Considere o número complexo $z = 2e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}} - \mathrm{i}$.

O módulo de z é igual a:

(A) 1 **(B)** $\sqrt{7}$

(C) $\sqrt{5}$ **(D)** 3

5 Sabe-se que u e v são raízes de índice n de um determinado número complexo z.

Então, pode-se afirmar que:

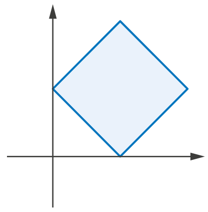
(A) $\mathrm{Arg}(u) = \mathrm{Arg}(v)$

(B) $z^n = u$

(C) $|u| = |v|$

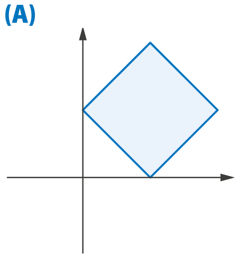
(D) $u = -v$

6 Na figura está representado, no plano complexo, um quadrado cujos vértices são os afixos de quatro números complexos: z_1, z_2, z_3 e z_4.

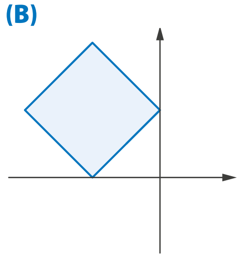


Qual das figuras seguintes pode representar, no plano complexo, o quadrilátero cujos vértices são os afixos dos números complexos $\overline{\mathrm{i}\,z_1}$, $\overline{\mathrm{i}\,z_2}$, $\overline{\mathrm{i}\,z_3}$ e $\overline{\mathrm{i}\,z_4}$?

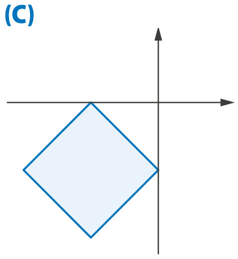
(A)



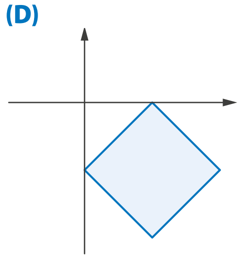
(B)



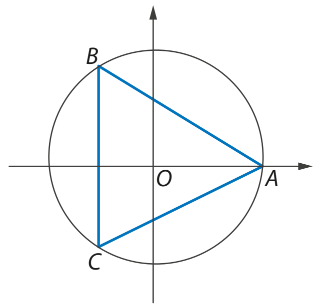
(C)



(D)



7 Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$ inscrito numa circunferência de centro na origem. O ponto A é o afixo do número real 2.



Qual dos números complexos seguintes tem por afixo o vértice B?

(A) $\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

(B) $2e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

(C) $-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

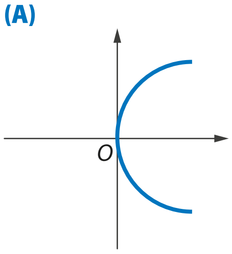
(D) $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$

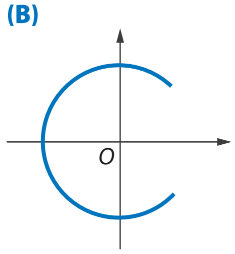
8 Sejam z_1 e z_2 duas das raízes de índice n de um número complexo z.
Sabe-se que os afixos de z_1 e z_2 pertencem ao mesmo quadrante (eixos não incluídos). O valor de n pode ser:

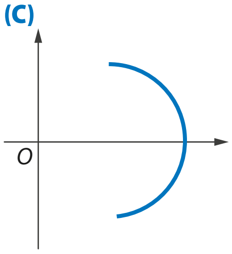
(A) 2 **(B)** 3
(C) 4 **(D)** 5

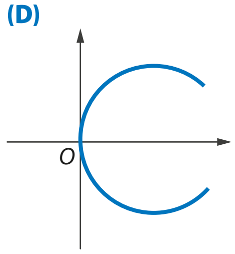
9 Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1 \wedge \frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\} ?$$

(A)


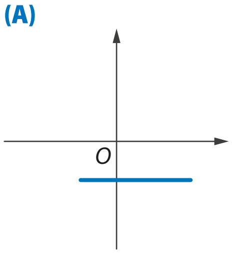
(B)


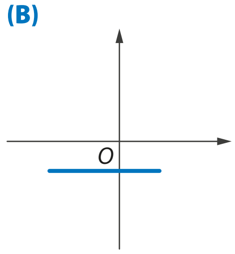
(C)


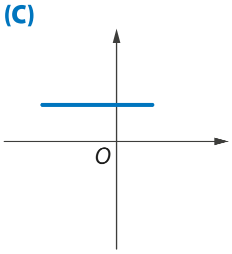
(D)


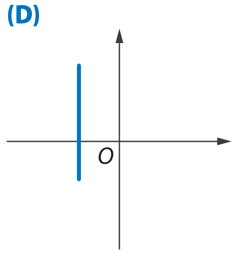
10 Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 2 \wedge \operatorname{Re}(iz) = 1 \wedge |z+1| \geqslant |z+i|\} ?$$

(A)


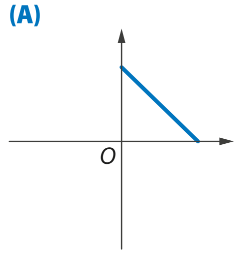
(B)


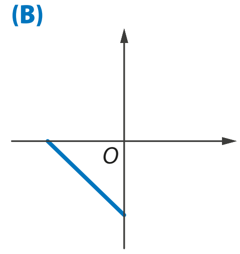
(C)


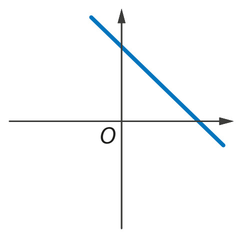
(D)


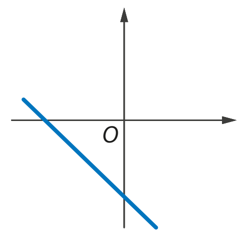
11 Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \sqrt{2} \wedge |z| = |z+1+i|\}$$

(A)


(B)


(C)


(D)


12 $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i a unidade imaginária.

Seja:

$$z = (1+i)(k+2i) \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determine k de forma que:

12.1. z seja um imaginário puro;

12.2. $z = \bar{z}$

13 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i a unidade imaginária.

13.1. Considere o polinómio $P(z) = z^3 + 8$.

Verifique que -2 é um zero de $P(z)$.

Determine analiticamente os restantes zeros de $P(z)$ simplificando-os o mais possível.

13.2. Seja z um número complexo.

Mostre que se $z = \bar{z}$, então $z \in \mathbb{R}$.

14 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

14.1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 - 4z^2 + 7z = 0$.

Apresente as soluções da forma mais simples possível.

14.2. Mostre que $iz + \dfrac{\bar{z}}{i}$ é um número real, $\forall z \in \mathbb{C}$.

14 **4.** Uma academia de dança oferece as modalidades de *ballet* clássico e de dança contemporânea, entre outras. Relativamente aos alunos que frequentam a academia, sabe-se que:

- 60% estão inscritos em *ballet* clássico;
- 25% estão inscritos em dança contemporânea e não estão inscritos em *ballet* clássico;
- metade dos inscritos em dança contemporânea também estão inscritos em *ballet* clássico.

Selecionou-se, ao acaso, um aluno da academia que não está inscrito em dança contemporânea. Determine a probabilidade de esse aluno estar inscrito em *ballet* clássico.

Apresente o resultado na forma de dízima.

12 * **5.** Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos ao diâmetro biparietal, x, em centímetros, medido na trigésima quarta semana de gravidez, e ao correspondente perímetro cefálico, y, em centímetros, medido à nascença, de uma amostra de oito recém-nascidos numa maternidade.

Diâmetro biparietal em cm (x)	**Perímetro cefálico** em cm (y)
7,49	30,36
7,81	31,99
8,21	33,66
8,30	35,26
8,66	35,51
8,76	34,86
9,04	35,30
9,24	37,63

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos diâmetros biparietais apresentados excede a respetiva média, arredondada às centésimas, em ____**I**____ cm.

A amplitude da amostra dos perímetros cefálicos apresentados é ____**II**____ cm.

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y, apresentadas na tabela, arredondado às centésimas, é ____**III**____.

Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x, e com base nas estimativas dos parâmetros, arredondadas às milésimas, para um recém-nascido, nesta maternidade, cujo diâmetro biparietal na trigésima quarta semana de gravidez tenha sido $8{,}50$ cm, estima-se que o perímetro cefálico à nascença seja, aproximadamente, ____**IV**____ cm.

I	**II**	**III**	**IV**
a) 0,04 **b)** 0,7 **c)** 1,75	**a)** 2,58 **b)** 3,64 **c)** 7,27	**a)** 0,87 **b)** 0,94 **c)** 3,54	**a)** 34,54 **b)** 36,11 **c)** 41,62

*** 6.** O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos, como, por exemplo, 1526 e 0232 . 14

Admita que o código de qualquer cartão multibanco é atribuído ao acaso, com algarismos de 0 a 9 .

Determine a probabilidade de o código atribuído a um cartão multibanco ter todos os algarismos diferentes, um dos algarismos ser o zero e a soma dos quatro algarismos ser um número ímpar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7. Na Figura 1, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro C, definida pela equação $(x+1)^2+(y-1)^2=4$, o triângulo $[ABC]$ e o ângulo BAC, de amplitude α, em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. 14

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato do comprimento do arco AB.

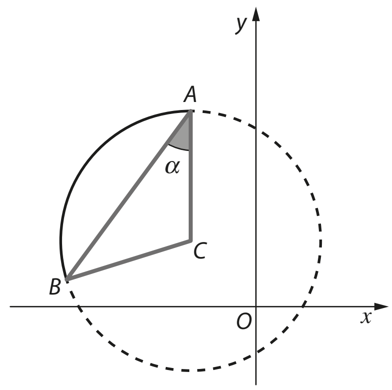


Figura 1

*** 8.** Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos. 12

Sabe-se que:

- os pontos A e C pertencem, respetivamente, ao 2.º e ao 3.º quadrantes;
- o ponto B pertence ao semieixo real negativo;
- o ponto D pertence ao semieixo imaginário negativo;
- o ponto W pertence ao 1.º quadrante e é o afixo de um número complexo w tal que $\text{Im}(w) = \text{Re}(w)$.

Qual dos pontos seguintes pode ser o afixo do número complexo $\text{i}w^3$?

(A) Ponto A

(B) Ponto B

(C) Ponto C

(D) Ponto D

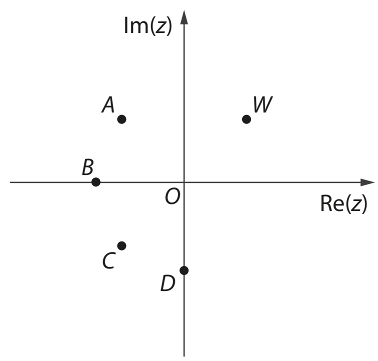


Figura 2

9. Resolva este item sem recorrer à calculadora. 14

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números $z_1 = 2\text{i}^{19}$ e $z_2 = \frac{-3+\text{i}}{1+\text{i}}$.

Seja $w = -\sqrt{2}\,k\,e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$, com $k \in \mathbb{R}$.

Determine o valor de k para o qual o afixo de w é equidistante do afixo de z_1 e do afixo de z_2.

10. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular $[ABCDEF]$.

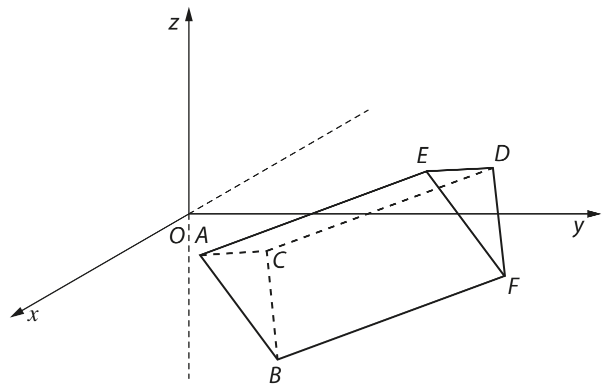


Figura 3

Sabe-se que:

- os pontos A e B têm coordenadas $(4\,,\ 2\,,\ 0)$ e $(2\,,\ 3\,,\ -3)$, respetivamente;
- o ponto C pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$;
- a reta DF é definida pela equação vetorial $(x\,,\ y\,,\ z) = (-7\,,\ 4\,,\ 2) + k(1\,,\ 1\,,\ -5)\,,\ k \in \mathbb{R}$.

12 *** 10.1.** Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta DF e que passa no ponto A?

(A) $(x\,,\ y\,,\ z) = (-1\,,\ 2\,,\ 1) + k(5\,,\ 0\,,\ -1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x\,,\ y\,,\ z) = (4\,,\ -3\,,\ -1) + k(0\,,\ 5\,,\ 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x\,,\ y\,,\ z) = (-6\,,\ 2\,,\ -2) + k(5\,,\ 0\,,\ -1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x\,,\ y\,,\ z) = (4\,,\ 8\,,\ -2) + k(0\,,\ 5\,,\ 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

14 *** 10.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C.

14 *** 11.** Numa certa região, foi localizado um enxame de gafanhotos.

Admita que o número, G, em milhões, de gafanhotos do enxame, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dado, aproximadamente, por

$$G(x) = 0{,}9e^{-0{,}6x}(x + 0{,}5)^3\,,\ \text{com}\ x \geqslant 0$$

De acordo com o modelo, existe um único instante a partir do qual, passadas quatro semanas, o número de gafanhotos ficou reduzido a metade do número de gafanhotos existentes nesse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, quantos dias decorreram desde as zero horas do dia em que o enxame foi localizado até esse instante.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

12. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = 3e^{x} - 2e^{-x}$$

Resolva os itens **12.1.** e **12.2.** sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

12.1. Considere, em referencial o.n. Oxy, a representação gráfica da função f e o trapézio $[OCAB]$, tais que: 14

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 5$;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e ao eixo Oy;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à abcissa do ponto A.

Determine a área do trapézio $[OCAB]$.

Apresente o resultado na forma $\ln(a)$, com $a > 0$.

12.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta de equação $y = 3x + 4$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]0, 1[$. 14

*** 13.** Considere uma função, f, de domínio $\mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. 14

Sabe-se que:

- a função f é crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$;
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função f.

Considere as proposições seguintes.

I. A função f é contínua em $x = 1$.

II. A reta de equação $y = -x + 2$ é tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

14. Considere uma sucessão de composições geométricas, construídas a partir de um semicírculo de raio 1. Na Figura 4, estão representadas as três primeiras composições dessa sucessão. 14

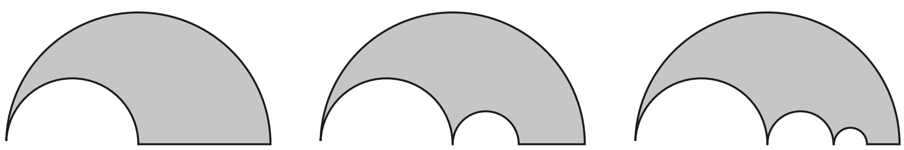


Figura 4

Tal como é ilustrado na Figura 4:

- a 1.ª composição foi obtida retirando-se ao semicírculo inicial um semicírculo nele contido, de raio $\frac{1}{2}$;
- a 2.ª composição foi obtida retirando-se à 1.ª composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{4}$;
- a 3.ª composição foi obtida retirando-se à 2.ª composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{8}$;
- e assim sucessivamente, retirando-se, em cada composição, um semicírculo contido na composição anterior, com metade do raio do semicírculo retirado nessa composição, de modo que o diâmetro de cada semicírculo retirado seja colinear com o diâmetro do semicírculo inicial.

Determine o perímetro da 20.ª composição geométrica desta sucessão.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

*** 15.** Sejam a, b e c números reais não nulos, e seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por 14

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

Seja r uma reta que intersecta o gráfico da função f no ponto de abcissa zero.

Mostre que, se a reta r intersectar o gráfico da função f noutros dois pontos distintos, então esses pontos têm abcissas simétricas.

FIM