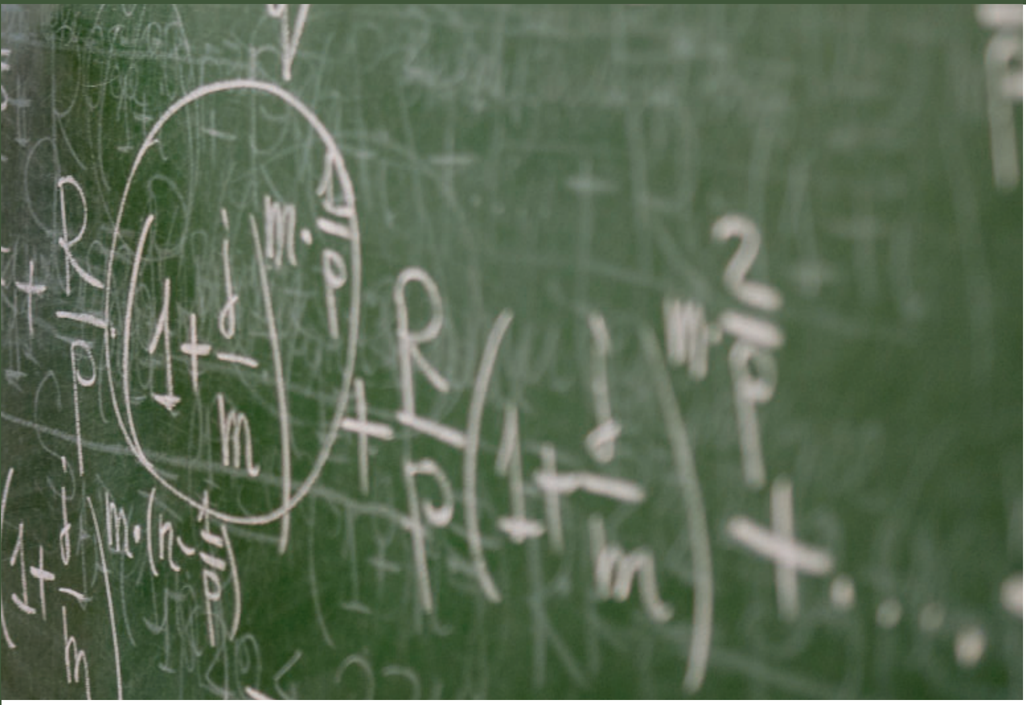
Fernando de Jesus
João Veríssimo Lisboa

TÉCNICAS BÁSICAS DE PREVISÃO MATEMÁTICA



VidaEconómica

ÍNDICE GERAL

NOTA PRÉVIA

O título deste livro identifica claramente o seu conteúdo, que, em particular, assume grande relevância na gestão científica das organizações, entre as quais se destacam as empresas. No entanto, deve notar-se que os temas desenvolvidos são também de interesse para a realização de previsões matemáticas noutras áreas do conhecimento.

No Capítulo 1, de caráter introdutório, são tecidas breves considerações sobre as previsões e sua classificação, evidenciando-se que as técnicas básicas de previsão matemática assentam em modelos que se enquadram nos domínios da análise da regressão e da análise das sucessões cronológicas.

Tendo em atenção que a aleatoriedade está presente na maior parte dos modelos matemáticos utilizados nas previsões, considerou-se útil apresentar resumidamente, no Capítulo 2, os elementos básicos de probabilidades e estatística que o leitor tem de conhecer para assimilar adequadamente a matéria exposta nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3, faz-se o estudo sucinto do ramo da estatística que é designado por estatística indutiva, cujo objeto é o de fazer inferências a partir de dados fornecidos por uma amostra.

O Capítulo 4 foi reservado para tratar da previsão por meio da regressão linear simples e múltipla, tecendo-se também breves considerações sobre a regressão não linear.

Finalmente, no Capítulo 5, são estudados os modelos matemáticos de previsão construídos com base na utilização de sucessões cronológicas.

Os autores

Fernando de Jesus
João Veríssimo Lisboa

CAPÍTULO 1
Introdução

1.1. Decisões e previsões

Qualquer problema de decisão numa organização – quer se trate da instalação de uma rede de distribuição, implantação de fábricas, investimentos, gestão de existências, etc. – necessita da estimativa de certos elementos referentes à vida futura dessa organização. É, pois, legítimo afirmar que *toda a decisão envolve uma previsão*. Esta não é mais do que a informação que auxilia o gestor a tomar uma decisão.

A natureza da decisão define o objetivo da previsão e, portanto, esta, quer seja intuitiva ou baseada em princípios rigorosos, nunca é independente das decisões que irão ser tomadas.

As decisões podem ser agrupadas em duas categorias: *táticas e estratégicas*.

As decisões táticas referem-se à gestão corrente da organização (por exemplo, problemas de aprovisionamento, repartição de recursos, vendas, etc.), *exigindo previsões a curto prazo.*

As decisões estratégicas referem-se, principalmente, às relações entre a organização e o meio económico ambiente, destinando-se, geralmente, a fixar a política de orientação geral ou de investimentos da organização. As decisões deste tipo implicam a realização de *previsões a longo prazo.*

1.2. Previsões a curto e longo prazo

A distinção entre previsões a curto e a longo prazo, embora arbitrária, é indispensável porque conduz a dois modos distintos de fazer previsões.

Em geral, é costume distinguir entre *curto, médio e longo prazo*. Os critérios de distinção podem ser diversos. Assim, atendendo à extensão do período considerado,

- Curto prazo: até 1 ano;
- Médio prazo: 1 a 5 anos;
- Longo prazo: superior a 5 anos.

Se atendermos à natureza dos problemas, então

- Curto prazo: gestão corrente;
- Médio prazo: investimentos;
- Longo prazo: evolução longínqua, afetando a própria existência da organização.

Finalmente, tendo em conta as variáveis a tomar em consideração para explicar o comportamento da organização, tem-se:

- Curto prazo: variáveis conjunturais;
- Médio prazo: fatores tendenciais;
- Longo prazo: fatores estruturais.

No entanto, poderemos daqui em diante distinguir apenas as previsões a curto prazo das previsões a longo prazo, convencionando que as previsões a médio prazo são análogas às previsões a longo prazo, mas referem-se a decisões estratégicas de consequências menos importantes.

Nas previsões a curto prazo, não é necessário analisar todos os fatores suscetíveis de intervir na evolução dos dados de base. O período de tempo é assaz curto para que, quaisquer que sejam os fatores intervenientes, a evolução de cada um deles possa ser considerada muito significativa. Tomemos, por exemplo, a previsão de vendas para dois ou três meses, que é o que se utiliza correntemente para a gestão de existências. É evidente que, durante este lapso de tempo, a influência dos fatores que se repercutem nas vendas pode considerar-se desprezável e, portanto, o estudo das vendas passadas permitirá, por extrapolação, fazer previsões de vendas a curto prazo relativamente precisas.

Nas previsões a longo prazo, a simples projeção do passado é insuficiente, em consequência de ser extenso o período considerado. Será necessário

CAPÍTULO 2
Elementos básicos de probabilidades e estatística

2.1 Espaço de resultados. Acontecimentos

Consideremos a *experiência* do lançamento de um dado. Os seis possíveis resultados são 1, 2, 3, 4, 5 e 6, que constituem o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a que se dá o nome de *espaço dos resultados* (*ou espaço amostra*).

A qualquer subconjunto de Ω dá-se o nome de *acontecimento*. Em particular, são acontecimentos Ω (*acontecimento certo*) e $\varnothing$ (*acontecimento impossível*). Os *acontecimentos elementares* são os subconjuntos de Ω com um só elemento.

São exemplos de acontecimentos, em relação ao espaço de resultados anteriormente apresentado, os seguintes:

$A_1 = \{1\}$ (saída de face com o número 1);

$A_2 = \{1, 3, 5\}$ (saída de um número ímpar de pontos);

$A_3 = \{2, 4, 6\}$ (saída de um número par de pontos).

2.2 Axiomática da probabilidade

Dado um conjunto qualquer *A*, consideremos a classe *C* de todos os subconjuntos de *A*:

$$C = \left\{ X : X \subseteq A \right\}.$$

É evidente que $\varnothing \in C$ e $A \in C$. Admitamos que:

1. A reunião de qualquer número destes subconjuntos é subconjunto que pertence à classe *C*.
2. A interseção de qualquer número destes subconjuntos é subconjunto que pertence à classe *C*.
3. A diferença de quaisquer dois subconjuntos pertence a *C*.
4. O complementar de qualquer subconjunto pertence a *C*.

Se *C* obedece a estas quatro propriedades, diz-se que *C* é um *corpo de conjuntos.*

No caso do lançamento de um dado, a classe de todos os subconjuntos de Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} é constituída por

Ø

{1}, {2}, {3}, {4},{5}, {6},

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, ...

{2, 3}, {2,4}, ...

....

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

cujo número é

$$C_0^6 + C_1^6 + C_2^6 + \ldots + C_6^6 = 2^6 = 64 \text{ conjuntos.}$$

Dados os acontecimentos

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{3, 4\},$$

a *reunião* de *A* e *B* é

$$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

que pertence à classe dos subconjuntos de Ω. Diz-se que os acontecimentos *A* ou *B* ou *ambos ocorrem.*

A interseção de *A* e *B* é

$$A \cap B = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$$

CAPÍTULO 3
Elementos básicos de estatística indutiva

3.1 Estimação

Na maior parte dos estudos de estatística aplicada, há que fazer inferências relativas a uma *população,* a partir de dados fornecidos por uma *amostra.* É este o problema da *estimação estatística.*

Consideremos uma variável aleatória *X*, discreta ou contínua, cuja função de distribuição é *F(x*).

Suponhamos que tomamos amostras aleatórias de tamanho *n* da variável aleatória *X*:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(x_1', x_2', \ldots, x_n')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A amostra genérica $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pode ser considerada como valor assumido pela variável aleatória *n*-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. É claro que $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$ e as variáveis X_i são independentes e possuem distribuição idêntica à distribuição de *X*.

Dada a estatística $Z_n = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, função do vetor aleatório $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, Z_n é variável aleatória. A cada valor observado $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ do vetor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ corresponderá o valor numérico $z_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Na prática, usa-se o termo "estatística" quer para designar a variável aleatória Z_n quer o valor concreto que Z_n assume para a amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por exemplo, tomando a estatística definida pela variável aleatória (média)

$$\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n},$$

$\overline{X}_n$ assume o valor

$$\overline{x}_n = \frac{\sum x_i}{n}$$

para a amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, podendo ser tomado como *estimativa pontual* do valor médio μ da população.

É frequente a utilização da mesma letra minúscula para representar as estatísticas nestas duas aceções e o índice n pode ser omitido sempre que seja desnecessário. Esta é a orientação seguida na exposição apresentada no presente capítulo e subsequentes. Assim, por exemplo, tomando uma amostra constituída por n observações $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a média dessa amostra, $\overline{x}_n = \sum x_i \big/ n$, pode tomar-se como estimativa de μ, valor médio da população donde foi extraída a amostra.

De acordo com a orientação acima exposta, $\overline{x}$ designa também a variável aleatória cujo valor médio é $\mu(\overline{x}) = \mu$ e cuja variância é $\sigma^2(\overline{x}) = \sigma^2 \big/ n$.

Se, em vez de pretendermos estimar o valor médio da população, quisés-semos estimar a sua variância, poderíamos considerar com estimativa a variância da amostra

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2.$$

Quando n é pequeno, e por razões que não interessa aqui invocar, é prefe-rível tomar a estimativa

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} s^2.$$

CAPÍTULO 4
A previsão por meio da regressão

4.1 Método dos mínimos quadrados

O *método dos mínimos quadrados* (*m.m.q.*) é um processo de estimação que consiste em tomar por estimativa do valor desconhecido da população o valor da amostra, tal que a soma dos quadrados dos desvios dos valores em relação a essa estimativa seja mínima.

Por exemplo, seja $\hat{X}$ o valor da população a ser estimado a partir da amostra de observações x_1, x_2, . . . ,x_n. Utilizaremos o valor de $\hat{x}$ da amostra como estimativa de $\hat{X}$. Para calcular $\hat{x}$, constrói-se a soma dos quadrados dos desvios.

$$Q = \left(x_1 - \hat{x}\right)^2 + \left(x_2 - \hat{x}\right)^2 +,\ldots,\left(x_n - \hat{x}\right)^2$$

e determine-se $\hat{x}$ por forma a minimizar Q. Ora

$$\frac{dQ}{d\hat{x}} = -2\left(x_1 - \hat{x}\right) - 2\left(x_2 - \hat{x}\right) -,\ldots,-2\left(x_n - \hat{x}\right)$$

e, portanto, a relação $\frac{dQ}{d\hat{x}} = 0$ dá

$$\hat{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

valor que de facto é minimizante, pois $\frac{d^2Q}{d\hat{x}} = 2n > 0.$

Vê-se, pois, que $\hat{x}$ não é mais do que a média aritmética dos valores observados.

Na prática, os dados da amostra são constituídos frequentemente por pares, ternos, etc. de medidas. Por exemplo, a amostra pode compreender observações do consumo e do rendimento de certo número de famílias.

Tem então interesse considerar a relação entre as variáveis e o *m.m.q.*, sob certas condições, permite estimar essa relação. Quando aplicado a uma relação entre variáveis, o método dos mínimos quadrados passa a designar-se por *análise de regressão*.

4.2 Regressão linear simples

A *regressão simples* refere-se a uma relação entre duas variáveis. A regressão diz-se *múltipla* se há mais de duas variáveis envolvidas na relação.

Suponhamos que existe uma variável aleatória y que está relacionada com outro variável x não aleatória por meio da equação

$$y = a + bx + u,$$

onde a e b são parâmetros desconhecidos e u é a variável aleatória não observável.

Supõe-se que dispomos de uma amostra de n pares de observações (x_1,y_1), (x_2,y_2), . . . , (x_n,y_n), em que x e y são medidas sem erro. Pondo

$$y_i = a + bx_i + u_i$$

admita-se que

$$E\left(u_i\right) = 0 \quad \left(i = 1, 2, ..., n\right), \quad E\left(u_i u_j\right) = \begin{cases} \sigma^2 & \left(i = j\right) \\ 0 & \left(i \neq j\right). \end{cases}$$

A análise da regressão permite obter estimativas de a e b (*coeficientes de regressão*) que são os parâmetros desconhecidos da relação linear que tem lugar na população.

CAPÍTULO 5
A previsão por meio das sucessões cronológicas

5.1 Sucessões cronológicas

No domínio das ciências empíricas, em particular na economia e na gestão, encontram-se frequentemente *sucessões cronológicas* (*crónicas* ou *sucessões temporais*), que podem ser definidas como sequências de observações de uma variável em pontos (momentos, instantes, períodos)[(1)] sucessivos de tempo durante certo intervalo.

Seja então uma sequência de observações

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

feitas nos momentos

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

contados a partir de uma origem que, em geral, se pode considerar arbitrária.

Na maior parte dos casos que se apresentam na prática, as observações são igualmente espaçadas, ou podem considerar-se como tal. Assim, tomando como unidade de tempo o que decorre entre duas observações sucessivas, pode escrever-se

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

correspondente aos momentos

$$1, 2, \ldots, n.$$

---

(1). Notemos que momento (ou instante) é um breve período de tempo, entendendo-se por período o intervalo de tempo que medeia entre dois acontecimentos ou duas datas.

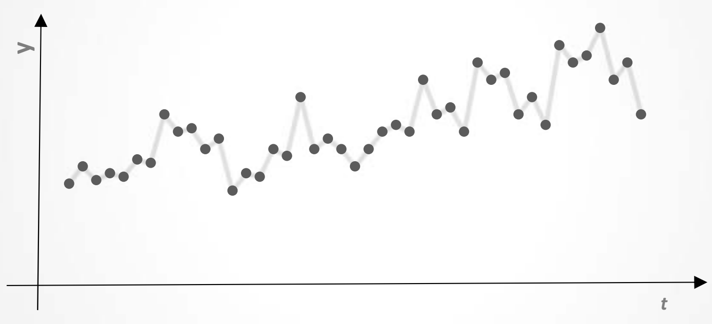
Por vezes, é vantajoso dispor as observações simetricamente em relação ao termo central da sucessão, considerando como origem o momento a que corresponde. Assim, ter-se-á

$$y_{-k},\ y_{-k+1},\ \ldots,\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{k-1},\ y_k,\ \ldots$$

onde se admitiu que o número de observações é ímpar, $n = 2k+1$, o que não implica a perda de generalidade, pois, como o número de observações é geralmente elevado, não importa desprezar uma destas.

A representação geométrica de uma sucessão cronológica pode obter-se tomando um gráfico cartesiano. No eixo horizontal representa-se o tempo e no eixo vertical a grandeza da medida. Este gráfico é vulgarmente designado por *cronograma*. O cronograma apresentará, aproximadamente, o aspeto da Figura 5.1.

Figura 5.1: Cronograma



Os investigadores detetaram quatro tipos de componentes nos movimentos caraterísticos das sucessões cronológicas:

1) *Movimentos de longo prazo* (ou *tendência geral*)

   Revelam o sentido geral do movimento e podem traduzir-se por uma curva que é designada por *linha de tendência*.

2) *Movimentos cíclicos* (ou *oscilatórios*)

   Traduzem os ciclos ou oscilações em torno da tendência, de amplitudes variáveis ou fixas, periódicas ou não (em geral, ocorrem com periocidade superior a um ano).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alba, F. N., “*Introduccion a la estatística*”, Madrid, 1958

Almeida, J. D., *Lições de estatística* (Vol. 1), Universidade do Porto, 1965

Battersby, A., “*Sales forecasting*”, Penguin Books, Harmondsworth, 1970

Brown, Robert G., “*Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*”, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall Inc., 1963

CEGOC, “*Iniciação às técncicas elementares de estatísticas comerciais*”, Lisboa, 1966

Chisholm, R. K. e Whitaker, G. R., “*Forecasting methods*”, Richard Irwin, Inc., Homeword, 1971

Chu, K, “*Principles of econometrics*”, International Textbook company, Soranton, 1968

D’Agostino, R. B., “Tests for the Normal Distribution”, in *Goodness-of-Fit Techniques*, Edição de R. B. D’Agostino e M. A. Stephens, Dekker, New York, 1986

Fletcher, A e Clarke G., “*Les méthodes mathématiques modernes dans l’entreprise*”, Entreprise Modern d’Édition, Paris, 1966

Gardener, Everette S. e Dannembring, David G., “Forecasting with exponential smoothing: Some guidelines for model selection”, *Decisions Science*, Vol. 11, pp. 370-381, 1980

Hellé, D., “*Les techniques de prévision au services de l’entrepise*”, Les Édition d’Organisation, Paris, 1970

Jesus, Fernando, “*Estatística descritiva*”, Edição da UBI, Covilhã, 1988

Johnston, J. e Dinardo, J., "*Econometric Methods*", McGraw-Hill Companies, New York . 1997

Labrousse, C., "*Statistique (exercises corrigés)* (Tome 3), Dunod, Paris, 1969.

Lisboa, João, Gomes, Carlos, "*Gestão de Operações*" Vida Económica, 3ª edição, 2018.

McClave, James T. And Benson, George P., "*Statistics for business and economics*", 3ª edição, Dellen Macmillan, USA, 1985

Marques, W., "*Aplicações estaísticas na actividade da empresa*", INII, Lisboa, 1967

Miller, Robert B. e Wichern, Dean W., "*Intermediate Business Statistics: Analysis of variance, regression and time series*", HRW, USA, 1977

Montgomery, Douglas C., "Introduction to Short-term Forecasting", *Journal of Industrial Engineering,* XIX, no. 10, pp. 500-503, 1968

Murteira, Bento J. F., Ribeiro, Carlos Silva, Silva, João Andrade e Pimenta, Carlos, "*Introdução à estatística*", McGraw-Hill, 2001

Murteira, Bento J. F., Muller, Daniel A. e Turkman, K. Feridun , "*Análise de sucessões cronológicas*", McGraw-Hill, 1993

Singhal, J. E Singhal, K., "Alternate approaches to solving the Holt et al. model and to perform sensitivity analysis", *European Journal of Operational Research*, Vol. 91, pp. 89-98, 1996

Spiegel, M. R., "*Statistiques*", Shaum Publishing C., New York, 1961

Sweet, Arnold L., "*Adaptive Smoothing for Forecasting Seasonal Series*", AIIE Transactions, Vol. 13, no. 3, September, 1981

Taylor, Sam G., "*Initialization of Exponential Smoothing Forecast*", AIIE Transactions, Vol. 13, September, 1981

T.E.A., "*Como prever as vendas*", Lisboa 1967

Toranzos, F. I., "Estatística", Editorial Kapelisz, Buenos Aires, 1962

Winters, Peter R., "Forecasting Sales by Exponential Weighted Moving Averages, Management Science, 6, no. 3, pp. 324-342, 1960

Zajdenweber, D., "*La prévision à court terme*", Dunod, Paris, 1969

APÊNDICE

Distribuição Beta

Domínio de X: [0, 1]

Função-densidade: $\dfrac{(a+b+1)!}{a!b!}x^a(1-x)^b$

Valor médio: $\overline{x} = \dfrac{a+1}{a+b+2}$

Variância: $\sigma^2 = \left(\dfrac{a+2}{a+b+3}\right)\left(\dfrac{a+1}{a+b+2}\right)$

Distribuição Gama

Domínio de X: [0, +∞[

Função de densidade: $\dfrac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}.e^{-bx} \qquad (b>0, p>0)$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \,.$$

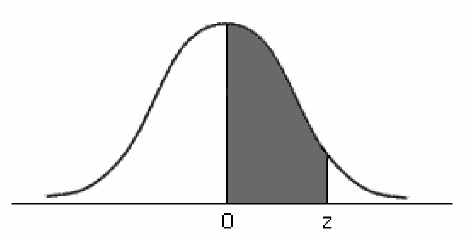
Valor médio: $\overline{x} = \dfrac{p}{b}$

Variância: $\sigma^2 = \dfrac{p}{b^2}$

A distribuição gama é muitas vezes útil para representar as vendas de uma empresa. Como as vendas não são negativas, e comparativamente raras as vendas baixas, sendo também raras as vendas muito elevadas, este comportamento pode ser descrito pela distribuição gama.

TABELAS

Tabela A – Distribuição Normal Estandardizada



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4986	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Tabela B – Distribuição Binomial

Os valores da tabela correspondem às probabilidades acumuladas

$$P(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} p(x)$$

para diferentes combinações de *n* e *p*.

n = 5

k	*P* .01	.05	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.75	.80	.90	.95	.99
0	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.187	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

n = 6

k	*P* .01	.05	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.75	.80	.90	.95	.99
0	.941	.735	.531	.262	.178	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000
1	.999	.967	.886	.655	.534	.420	.233	.109	.041	.011	.005	.002	.000	.000	.000
2	1.000	.998	.984	.901	.831	.744	.544	.344	.179	.070	.038	.017	.001	.000	.000
3	1.000	1.000	.999	.983	.962	.930	.821	.656	.456	.256	.169	.099	.016	.002	.000
4	1.000	1.000	1.000	.998	.995	.989	.959	.891	.767	.580	.466	.345	.114	.033	.001
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.822	.738	.469	.265	.059

n=7

k	*P* .01	.05	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.75	.80	.90	.95	.99
0	.932	.698	.478	.210	.133	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.998	.956	.850	.577	.445	.329	.159	.063	.019	.004	.001	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.996	.974	.852	.756	.647	.420	.227	.096	.029	.013	.005	.000	.000	.000
3	1.000	1.000	.997	.967	.929	.874	.710	.500	.290	.126	.071	.033	.003	.000	.000
4	1.000	1.000	1.000	.995	.987	.971	.904	.773	.580	.353	.244	.148	.026	.004	.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.981	.937	.841	.671	.555	.423	.150	.044	.002
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.867	.790	.522	.302	.068

n=8

	P														
k	.01	.05	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.75	.80	.90	.95	.99
0	.923	.663	.430	.168	.100	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.997	.943	.813	.503	.367	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.994	.962	.797	.679	.552	.315	.145	.050	.011	.004	.001	.000	.000	.000
3	1.000	1.000	.995	.944	.886	.806	.594	.363	.174	.058	.027	.010	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	1.000	.990	.973	.942	.826	.637	.406	.194	.114	.056	.005	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.950	.855	.685	.448	.321	.203	.038	.006	.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.633	.497	.187	.057	.003
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.900	.832	.570	.337	.077

n=9

	P														
k	.01	.05	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.75	.80	.90	.95	.99
0	.914	.630	.387	.134	.075	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.997	.929	.775	.436	.300	.196	.071	.020	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.992	.947	.738	.601	.463	.232	.090	.025	.004	.001	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.999	.992	.914	.834	.730	.483	.254	.099	.025	.010	.003	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	.999	.980	.951	.901	.733	.500	.267	.099	.049	.020	.001	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.997	.990	.975	.901	.746	.517	.270	.166	.086	.008	.001	.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.975	.910	.768	.537	.399	.262	.053	.008	.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.929	.804	.700	.564	.225	.071	.003
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.960	.925	.866	.613	.370	.086

n = 10

	P														
k	.01	.05	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.75	.80	.90	.95	.99
O	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
4	1.000	1.000	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	1.000	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
6	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

SOLUÇÕES

Capítulo II

1. P(A) + P(B) + P(C) = 1/6 + 1/6 + 1/6 =1/2.

2. a) P(AB) = P(A) ×P(B/A)=15/25×14/24=7/20.

   b) P=3/20.

   c) P(A_3)=1-7/20-3/20=1/2

3. P=18×81/10!=1/5.

4. P=1/3.

5. P=1–1$(3/4)^4$=1–81/256=175/256.

6. P(0)=1/16; P(1)=1/4; P(2)=3/8; P(3)=1/4; P(4)=1/16

7. P(0)=0,328; P(1)=0,410; P(2)=0,205; P(3)=0,051.

8. P(mais de 120 horas)=8/27.

9. a) k=1/5; b); P(x>10)=1/e^2; P(x≤5)=1–1/e; P(5≤x≤10)=1/e–1/e^2.

10. a) x=(u–170)/10 logo P(u<165)=0,3085 logo n_1=1000×0,3085≈309;

    b) P(u>200)=P(x>3)=0,00135; n_2=1000×0,00135≈1;

    c) P(160<u<180)=P(–1<x<1)=0,6826; n_3=1000×0,6826≈683.

Capítulo III

1. $P(-u_a \leq (\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \leq u_a)=0,95$ como $|\bar{x}-\mu| < 0,02\times 50 = 1$ vem n>384,16 logo n=385.

2. I.C. = (1,72±0,28)

3. Como $nS^2=(n-1)\,S'^2$, pretende-se $P\left(\chi_1^2 \le \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \le \chi_2^2\right)=0,90$,

como $P(\chi^2<\chi_1^2)=P(\chi^2<\chi_2^2)=(1-0,90)/2=0,05$, vem

para A $\chi_1^2=13,09$ $\chi_2^2=35,17$ logo $41,85 \le \sigma^2 \le 112,45$.

Para B $\chi_1^2=4,57$ $\chi_2^2=19,68$ logo $20,13 \le \sigma^2 \le 86,65$.

4. Não rejeitar a hipórese.

5. $\chi^2=7,5 < \chi^2_{0,05}=9,49$ logo o ajustamento é aceitável.

6. a) $\overline{x}=45/50=0,9$;

b) $\sigma^2=89/50-0,9^2=0,97$;

c) Como $\overline{x}=0,9$ pode-se usar $\lambda=0,9$;

d) Construir a tabela para $p_i=e^{-0,9}\times\frac{0,9^i}{i!}$ (i=0,1,2,3,4). Como o número de observações nas duas últimas classes é inferior a 5, agrupar as três últimas classes, vindo $\chi^2=0,0328$.

Como $\chi^2_\alpha=3,84>\chi^2=0,0328$ pode admitir-se a hipótese que a lei empírica é ajustável por uma lei de Poisson.

Capítulo IV

1. a) $r^2=0,9538$; $r=0,9766$; $F=165,073$.

b) $\hat{a}=50,737$ e $\hat{b}=0,0319$; IC para $\hat{a}$: $[19,553;\ 81,921]$; IC para $\hat{b}$: $[0,0262;\ 0,0377]$.

c) Previsão:370101; IC: $[335014;\ 405189]$.

2. $r^2=0,9692$; $r=0,9845$; $F=251,513$;

$\hat{a}=65,617: IC:[53,512;\ 77,721]$. $\hat{b}=1,690:\ IC:[1,444;\ 1,936]$.

previsão para $x=90$ é $217,694$; $IC:[198,953;\ 236,434]$.

3. $r^2=0,9223$; $r=0,9603$; $F=130,485$; $a=33,375$; IC: $[30,665;\ 36,085]$;
$b=2,391$; IC: $[1,929;\ 2,852]$;

Previsão para x=10 é 57,281; *IC*: [53,339; 61,224].

4. a) $\hat{b}_0$=11,694; $\hat{b}_1 = 0,0622(s_{\hat{b}_1} = 0,0166;\ t_1 = 3,75)$;

$\hat{b}_2 = 0,0031(s_{\hat{b}_2} = 0,0473;\ t_2 = 0,264)$;

$\hat{b}_3 = 0,012(s_{\hat{b}_3} = 0,047;\ t_3 = 0,0022)$.

b) r^2=0,900; F=35,895; c) y=16,856; *IC*: [7,263; 26,454].

5. y=17,277+3,237x+0,185x^2; r^2=0,994.

6.

	r^2	a	b
a)	0,998	-9,173	0,361
b)	0,995	3,555	0,021
c)	0,99997	0,023	1,541
d)	0,965	43,097	-1836,87
e)	0,967	0,156	-0,0013
f)	0,999	6,756	-0,0331

A melhor é: $\ddot{u} = \hat{\ }\ ^{\hat{b}}$ →y=0,0229$x^{1,541}$ com r^2=0,99997.

Capítulo V

1. Médias: 2007: 18; 2010: 22; 2013: 29,7; 2016: 34,7; 2019: 40,7.

2

t	y_t	Totais móveis (5 anos)	Médias móveis (5 anos)
1	500		
2	365		
3	430	2129	426
4	445	2010	402
5	389	1971	394
6	381	1928	386
7	326	1900	380
8	387	1922	384
9	417	1879	376
10	411		
11	338		

ÍNDICE SISTEMÁTICO

TÉCNICAS BÁSICAS DE PREVISÃO MATEMÁTICA

No âmbito das ciências factuais, que compreendem as ciências da natureza e as ciências sociais, tem grande importância a previsão de acontecimentos futuros assente em técnicas matemáticas que, ao longo do tempo, têm mostrado a sua eficácia.

Os autores desta obra apresentam essas técnicas básicas que, fundamentalmente, se apoiam em modelos matemáticos cuja construção e manuseamento se desenvolvem com recurso a conhecimentos nas áreas da análise matemática, álgebra linear e estatística.

Em particular, no que respeita à estatística, a importância da utilização de modelos matemáticos estocásticos na previsão levou os autores à inclusão de dois capítulos onde se apresentam, de modo sucinto, os conhecimentos básicos de probabilidades e estatística indutiva que facilitam a assimilação do conteúdo do livro.

www.vidaeconomica.pt

ISBN: 978-989-768-867-6

9 789897 688676 >