

Exercícios

Estatística Aplicada **2**



Elizabeth Reis
Paulo Melo
Rosa Andrade
Teresa Calapez

3ª Edição
Revista e Corrigida



EDIÇÕES SÍLABO

ESTATÍSTICA APLICADA

Volume 1

**Probabilidades, Variáveis aleatórias,
Distribuições Teóricas**

Volume 2

**Amostragem, Estimação pontual e por intervalos,
Ensaio de hipóteses paramétricos e não paramétricos**

EXERCÍCIOS DE ESTATÍSTICA APLICADA

Volume 1

**Probabilidades, Variáveis aleatórias,
Distribuições Teóricas**

Volume 2

**Amostragem, Estimação pontual e por intervalos,
Ensaio de hipóteses paramétricos e não paramétricos**

EXERCÍCIOS
DE
ESTATÍSTICA
APLICADA

Vol. 2

3ª Edição

Revista e Corrigida

ELIZABETH REIS
PAULO MELO
ROSA ANDRADE
TERESA CALAPEZ

EDIÇÕES SÍLABO

É expressamente proibido reproduzir, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio gráfico, eletrónico ou mecânico, inclusive fotocópia, este livro.

As transgressões serão passíveis das penalizações previstas na legislação em vigor.

Não participe ou encoraje a pirataria eletrónica de materiais protegidos.

O seu apoio aos direitos dos autores será apreciado.

Visite a Sílabo na rede

www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Exercícios de Estatística Aplicada – Vol. 2

Autores: Elizabeth Reis, Paulo Melo, Rosa Andrade, Teresa Calapez

© Edições Sílabo, Lda.

Capa: Pedro Mota – Composição baseada na obra de Paul Klee: *Föhn im Marc'schen Garten*,
aguarela sobre cartão, 20 × 15 cm.

1ª Edição – Lisboa, fevereiro de 2004

3ª Edição – Lisboa, dezembro de 2020

Impressão e acabamentos: Europress, Lda.

Depósito Legal: 478050/20

ISBN: 978-989-561-143-0

 **EDIÇÕES SÍLABO, Lda.**
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2

1170-100 Lisboa

Telf.: 218130345

e-mail: silabo@silabo.pt

www.silabo.pt

Índice

Capítulo 1 – Distribuições amostrais	7
RESOLUÇÕES.	21
Capítulo 2 – Estimação pontual	55
RESOLUÇÕES.	71
Capítulo 3 – Estimação por intervalos	113
RESOLUÇÕES.	127
Capítulo 4 – Ensaio de hipóteses paramétricos	161
RESOLUÇÕES.	177
Capítulo 5 – Ensaio de hipóteses não paramétricos	231
RESOLUÇÕES.	245
Apêndice – Tabelas Estatísticas	289

Índice do 1º Volume

Capítulo 1 – TEORIA DAS PROBABILIDADES

Capítulo 2 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Capítulo 3 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS MAIS IMPORTANTES

Apêndice – TABELAS ESTATÍSTICAS

Capítulo 1

Distribuições amostrais

© Edições Sílabo / 2021-01-07

Exercício**1**

Considere uma amostra aleatória de dimensão $n = 2$, (X_1, X_2) , retirada da população X : número de animais de estimação por família, cuja distribuição é a seguinte:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,60	0,25	0,10	0,05

- a)** Qual a probabilidade de obter a amostra $(3, 1)$, ou seja, qual a probabilidade de a primeira família selecionada ter três animais de estimação e a segunda ter um animal de estimação?
- b)** Liste todas as possíveis amostras daquela dimensão que pode obter.
- c)** Qual das amostras de dimensão 2 é a mais provável?
- d)** Qual a probabilidade de a média amostral \bar{X} ser igual a 2,5?

R: a) 0,0125 ; c) $(x_1, x_2) = (0,0)$ é a mais provável ; d) 0,01

Exercício**2**

Uma amostra aleatória de dimensão $n = 2$ é retirada (com reposição) de uma população cuja função de probabilidade é a seguinte:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,15	0,12	0,35	0,20	0,18

- a)** Qual a amostra mais provável?
- b)** Determine a $P[\bar{X} = 1,5]$ na amostra.

R: a) $(x_1, x_2) = (2, 2)$ cuja probabilidade de ocorrer é 0,1225 ; b) 0,144.

Exercício**3**

O conteúdo em litros de garrafas de azeite de certa marca segue distribuição normal com média $\mu = 0,99$ litros e desvio-padrão $\sigma = 0,02$ litros.

Qual a probabilidade de o conteúdo médio numa amostra de 16 garrafas selecionadas aleatoriamente ser superior a um litro?

R: 0,0228.

Exercício**4**

Uma caixa contém duas bolas pretas e uma bola branca. Seja X – n.º de bolas pretas retiradas da caixa numa única extração.

a) Qual a distribuição da variável aleatória X ?

b) Considere uma amostra aleatória de tamanho $n = 9$ e seja $T = \sum_{i=1}^9 X_i$.
Deduz a distribuição amostral de T .

c) Calcule $P[0 \leq T \leq 3]$

R: a) $X \sim b\left(x; n = 1; p = \frac{2}{3}\right)$;

b) $T \sim b\left(t; n = 9; p = \frac{2}{3}\right)$;

c) 0,0253.

Exercício**5**

Considere uma população Bernoulli X da qual se retira uma amostra aleatória de dimensão 5.

A função de probabilidade é $f(x) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$.

a) Deduza a distribuição conjunta da amostra e explique qual o seu significado.

b) Admitindo que p – proporção de sucessos na população – é 0,6, calcule a probabilidade de obtermos a seguinte amostra.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$$

c) Obtenha a distribuição amostral da proporção de sucessos numa amostra de dimensão 5.

R: a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = p^{\sum_{i=1}^5 x_i} (1-p)^{5 - \sum_{i=1}^5 x_i}$ com $0 \leq p \leq 1$ e $x_i = 0, 1$;

b) 0,03456 ;

c) $f(\bar{x}) = \binom{5}{5\bar{x}} p^{5\bar{x}} (1-p)^{5-5\bar{x}}$ com $\bar{x} = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$.

Exercício

6

Seja X uma população de Poisson de parâmetro $\lambda = 0,7$ da qual se retirou uma amostra aleatória de tamanho $n = 3$.

a) Calcule a probabilidade de obter a amostra (2, 1, 0). Justifique adequadamente a sua resposta.

b) Deduza a distribuição amostral da estatística $T = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3}$.

c) Calcule $P[T > 1]$.

R: a) 0,0210076; b) $f(3t) = \frac{e^{-2,1} \times 2,1^{3t}}{(3t)!}$, $t = \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ c) 0,1613.

Exercício

7

Considere as seguintes amostras de tamanho $n = 3$ retiradas de uma população com distribuição Poisson de parâmetro λ .

Amostra 1: (0, 2, 1)

Amostra 2: (2, 2, 4)

- a) Utilizando a função de probabilidade conjunta da amostra, determine a probabilidade de obter a Amostra 1.
- b) Qual das amostras é a mais provável para $\lambda = 1,9$.

R: a) $\frac{e^{-3\lambda} \cdot \lambda^3}{2}$; b) A Amostra 1.

Exercício

8

Considere uma população X cuja distribuição de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{(1-\theta)^x}{\theta^{x-1}} \quad x = 0, 1 \quad 0 < \theta < 1$$

- a) Deduza a distribuição conjunta de uma amostra aleatória de tamanho $n = 10$ retirada daquela população e explique o seu significado.
- b) Suponha que retirou a seguinte amostra concreta daquela população: $x_{(10)}^* = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$. Se $\theta = 0,1$, qual a probabilidade de obter aquela amostra?

R: a) $f(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = \frac{(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{10} x_i}}{\theta^{\sum_{i=1}^{10} x_i - 10}}$; b) 0,004305.

Exercício

9

Considere uma população normal com média μ e variância 15.

Para uma amostra de dimensão $n = 10$, calcule:

$$P[(\bar{X} - \mu)^2 \leq 7,53]$$

R: 0,975.

Exercício**10**

A população X segue distribuição normal com média 0 e desvio-padrão 1.

Considere uma amostra aleatória de dimensão 16 recolhida daquela população e a seguinte estatística:

$$T_1 = \sum_{i=1}^4 X_i^2$$

Deduza a distribuição amostral de T_1 , indicando os respetivos parâmetros.

R: $T_1 \cap \chi_{(4)}^2$ com $E[T_1] = 4$ e $VAR[T_1] = 8$.

Exercício**11**

Considere a seguinte estatística, definida com base numa amostra aleatória de tamanho 10:

$$T = \frac{5 X_1 + 5 X_{10}}{10}$$

Qual a distribuição e parâmetros de T , se considerarmos que aquela amostra foi retirada de uma população normal?

R: $E[T] = \mu$; $VAR[T] = \frac{1}{2} \sigma^2$; $T \cap n\left(\mu; \sigma\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Exercício**12**

O rendimento familiar em euros de determinada região segue distribuição aproximadamente normal com média 500 € e variância 324 €².

Qual a probabilidade de, em amostras de 16 famílias daquela região:

- a)** o rendimento familiar médio ser inferior a 491 €?
- b)** a variância amostral exceder os 506,25 €²?

R: a) 0,0228 ; b) 0,05.

Exercício**13**

Considere uma amostra aleatória de tamanho $n = 5$, obtida de uma população com distribuição normal com média 12 e desvio-padrão 4.

- a) Qual a probabilidade de que a média amostral seja superior a 13?
b) Comente a seguinte afirmação: «A probabilidade de a variância amostral corrigida ser superior a 4,24 é de apenas 0,10».

R: a) 0,2877 ; b) A afirmação é falsa.

Exercício**14**

O erro de medição do comprimento do raio de um círculo é uma variável aleatória com distribuição normal com média $\mu = 0$ e desvio-padrão 5.

Em 20 medições independentes, qual a probabilidade da média dos quadrados dos erros de medição ser superior a 30?

R: $\approx 0,25$.

Exercício**15**

No âmbito de um estudo sobre hábitos televisivos, um canal de televisão pretende estimar o tempo médio que uma criança em idade escolar passa a ver televisão por semana.

Qual deverá ser o tamanho da amostra a recolher se se pretender afirmar com probabilidade mínima de 0,95 que a média da amostra difere da média da população no máximo de 1/4 de hora?

Suponha que o tempo gasto por uma criança a ver televisão segue distribuição normal com desvio-padrão de 3,4 horas.

R: $n \geq 711$.



PAULO MELO licenciou-se em Economia pelo ISCTE em 1977. Lecionou várias disciplinas na área de Métodos Quantitativos, no ISCTE e na Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa, bem como em cursos de pós-graduação promovidos pelo INDEG/ISCTE. Em 1985 concluiu o mestrado em Economia, na área de Economia das Telecomunicações, pela Faculdade de Economia da UNL. Colaborou com a Direção de Planeamento do Banco Fonseca & Burnay e com a Direção de Marketing da TMN. Nos CTT – Telecomunicações foi responsável pelas áreas de Política Tarifária e de Planeamento de Marketing.

ROSA ANDRADE licenciou-se em Economia pelo ISCTE, em 1977. Em 1982 completou a parte escolar do mestrado em Métodos Matemáticos Aplicados à Economia e Gestão de Empresas do ISEG. Foi professora auxiliar convidada no ISCTE-IUL até 2014, onde lecionou Estatística I e Estatística II na licenciatura de Gestão. A partir de 1993 e até final de 2014, desempenhou várias funções técnicas e de chefia na Autoridade Nacional de Comunicações (ICP-ANACOM).

TERESA CALAPEZ licenciou-se em Matemáticas Aplicadas, em 1986, pela Faculdade de Ciências de Lisboa. Concluiu o mestrado em Estatística e Investigação Operacional em 1991 pela mesma Faculdade e o doutoramento em Métodos Quantitativos, na especialidade de Análise Multivariada de Dados, pelo ISCTE-IUL, em 2004. Atualmente é professora auxiliar no ISCTE-IUL onde leciona e coordena várias unidades curriculares na área da Estatística e da Análise de Dados, nos diversos ciclos de ensino. É membro da Sociedade Portuguesa de Estatística, investigadora da BRU/UNIDE-IUL, Business Research Unit do ISCTE-IUL e colabora regularmente com o Dinâmia/CET-IUL.

ELIZABETH REIS licenciou-se em Economia pela Faculdade de Economia da Universidade do Porto em 1979. Em 1984 concluiu a Pós-graduação em Social Statistics na Universidade de Southampton e, em 1987, o Ph.D. na mesma área científica. É doutora em Métodos Quantitativos para Gestão pela Universidade Técnica de Lisboa, tendo obtido a Agregação em Métodos Quantitativos pelo ISCTE-IUL em 1999, instituição onde lecionou e coordenou unidades curriculares de Estatística, Análise de Dados, Métodos de Recolha de Informação, Pesquisa de Mercados e Metodologias de Investigação em cursos de Licenciatura, Mestrado e Doutoramento, nos diversos domínios da Gestão Empresarial e das Ciências Sociais. É atualmente Professora Catedrática e Vice-Reitora do ISCTE.

Este livro destina-se aos estudantes de Estatística, qualquer que seja a licenciatura que frequentem, e a todos aqueles que na vida profissional utilizem esta ferramenta de trabalho.

Depois de várias edições e reimpressões, que atestam a sua popularidade e excelente acolhimento pelo seu público-alvo, surge agora em terceira edição revista e corrigida.

A obra trata da Estatística prática, complementando as publicações de exposição teórica dos mesmos autores e dando resposta às necessidades manifestadas por estudantes de diversas licenciaturas no que respeita à formulação e resolução de exercícios no âmbito da Estatística.

Os problemas propostos, de diferentes níveis de dificuldade, cobrem todas as matérias relevantes da Estatística e estão, todos eles, integralmente resolvidos, permitindo ao estudante e ao leitor um processo adequado de aprendizagem, treino e autoavaliação dos conhecimentos adquiridos.

No final são apresentadas as tabelas das diferentes distribuições estatísticas indispensáveis a todos os que estudam Estatística.

Exercícios

Estatística Aplicada 2

ISBN 978-989-561-143-0

