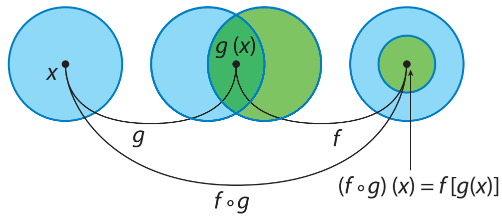
5. Composição de funções

Dadas duas funções, f e g, a composta de f com g escreve-se $f \circ g$ (lê-se: f após g ou composta de f com g) e é definida por:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$



O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números reais que pertencem ao domínio de g tais que $g(x)$ pertence ao domínio de f.

Simbolicamente

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}:\ x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

A composição de duas funções não é comutativa mas é associativa.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),\ \forall f,\ g \text{ e } h$$

Quando $f \circ g = g \circ f$, f e g dizem-se **funções permutáveis**.

Exemplo 5

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$.

Caracterize as funções $f \circ g$ e $g \circ f$. As funções f e g são permutáveis?

Resolução

Função $f \circ g$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}:\ x^2 \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\} \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{\sqrt{x^2} - 1} = \frac{1}{|x| - 1}$$

$$f \circ g:\ \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ com } (f \circ g)(x) = \frac{1}{|x| - 1}$$

Função $g \circ f$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \wedge \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \geqslant 0 \wedge x \neq 1\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$$

$$g \circ f:\ \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ com } (g \circ f)(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$$

As funções f e g não são permutáveis porque as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ são diferentes.

Verifica 5

Sejam as funções f, g e h, definidas por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \dfrac{x}{2} - 1$ de domínios $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_0^+$ e $\mathbb{R}$, respetivamente.

5.1. Caracterize as funções:

a) $f \circ g$

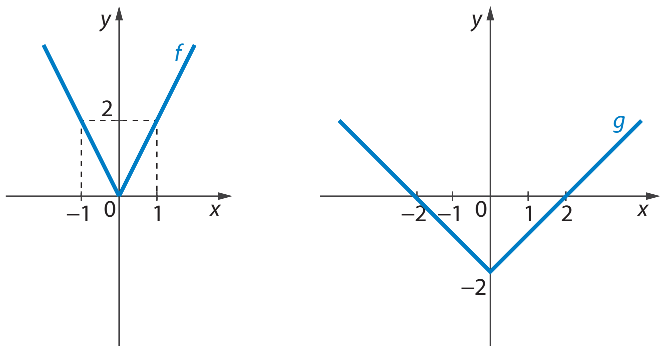
b) $f \circ h$

c) $h \circ g$

5.2. Indique, entre as dadas, um par de funções permutáveis, caso existam.

Questões resolvidas

9 Nas figuras seguintes estão representações gráficas de duas funções f e g.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x) = f(2x) - 2$ **(B)** $g(x) = 2f(x) - 2$

(C) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ **(D)** $g(x) = \frac{1}{2}f(x) + 2$

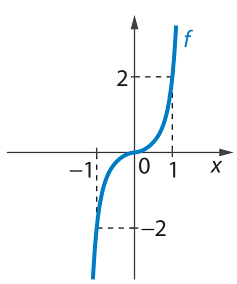
Resolução

O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por uma dilatação horizontal de coeficiente 2 $\left(f(x) \curvearrowright f\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ seguida de uma translação de vetor $(0, -2)$:

$\left(f\left(\frac{x}{2}\right) \curvearrowright f\left(\frac{x}{2}\right) - 2\right)$

Resposta: (C)

10 Na figura está representada parte do gráfico de uma função f.



Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x|$.

Qual é o valor de $(f^{-1} \circ g)(-2)$?

(A) -1 **(B)** -2

(C) 1 **(D)** 2

Resolução

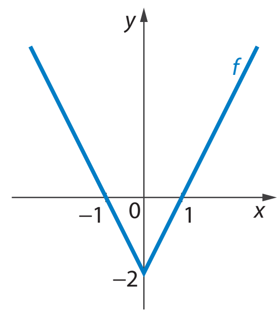
$(f^{-1} \circ g)(-2) = f^{-1}(g(-2)) =$

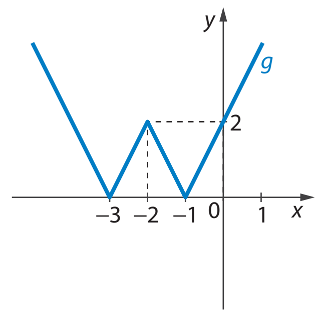
$= f^{-1}(|-2|) = f^{-1}(2) = 1$

Resposta: (C)

Questões propostas

9 Nas figuras seguintes estão representações gráficas de duas funções f e g.





Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

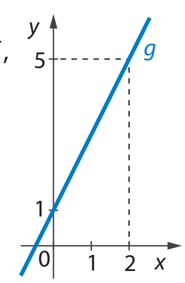
(A) $g(x) = |f(x-2)|$

(B) $g(x) = f(|x+2|)$

(C) $g(x) = |f(x+2)|$

(D) $g(x) = |f(x) - 2|$

10 Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = \sqrt{x} + 2$ e a função afim g, representada graficamente na figura ao lado.



Indique o valor de $f((g \circ f)(4))$.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 5

11 De uma função quadrática f sabe-se que:

- 2 e 6 são zeros
- $f(3) > f(2)$

Qual é o contradomínio de f?

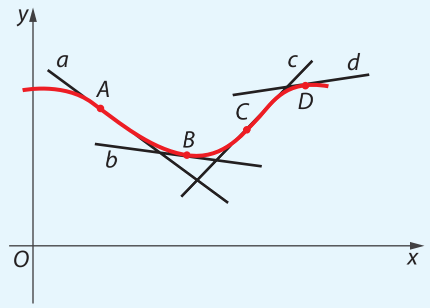
(A) $]-\infty, f(4)]$ **(B)** $]-\infty, f(2)]$

(C) $[f(4), +\infty[$ **(D)** $[f(6), +\infty[$

Questões para praticar

Itens de seleção

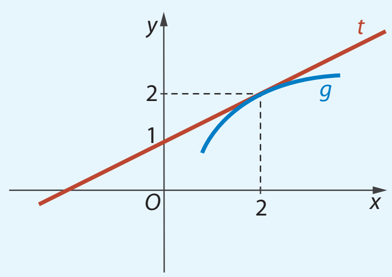
50 Na figura seguinte está a representação gráfica de uma função h e das retas a, b, c e d, tangentes ao gráfico de h nos pontos A, B, C e D, respetivamente.



Sabe-se que a função h admite primeira e segunda derivadas em todos os pontos.
Em qual dos pontos, A, B, C ou D, se poderá ter $f'(x) < 0$ e $f''(x) = 0$?

(A) A **(B)** B **(C)** C **(D)** D

51 Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial g bem como parte da reta t, tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(2, 2)$.
A reta t interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.



Qual das expressões seguintes pode definir g', função derivada de g?

(A) $\frac{x}{2} + 1$ **(B)** $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

(C) $-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2} - \frac{x}{2}$

52 De uma função f, derivável em $\mathbb{R}$, sabe-se que a reta de equação $y = 2x + 1$ é tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 1.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \frac{[f(x)]^2 - 3f(x)}{x^2 - x}$?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 9

53 De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(0) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) A função f é contínua em $\mathbb{R}$.

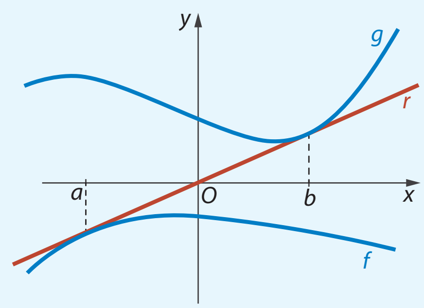
(B) O gráfico da função f tem uma assíntota paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

(C) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

(D) $f'(0) = 0$

54 Na figura seguinte estão representados, num referencial o.n. xOy:

- parte dos gráficos de duas funções, f e g, de domínio $\mathbb{R}$;
- uma reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $f'(a) < g'(b)$ **(B)** $f'(a) - g'(b) = 0$

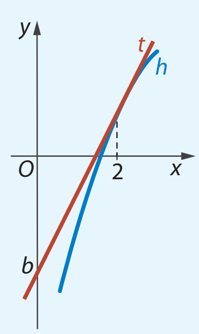
(C) $f'(a) \times g'(b) < 0$ **(D)** $f'(a) + g'(b) = 0$

55 Na figura estão representados, num referencial xOy:

- parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

  $h(x) = 1 + 4\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

- a reta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2 e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada b.



Qual é o valor de b?

(A) -4 **(B)** -3 **(C)** -2 **(D)** -1

Avaliação

1 Seja z um número complexo de argumento $\frac{6\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do número complexo $-\bar{z}$?

(A) $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $\frac{9\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{4\pi}{5}$

2 Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do número complexo $i\bar{z}$?

(A) $\frac{3\pi}{10}$ **(B)** $-\frac{\pi}{5}$ **(C)** $\frac{7\pi}{10}$ **(D)** $\frac{13\pi}{10}$

3 Considere o número complexo $z = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Um argumento de $\overline{-z}$ é:

(A) $-\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{\pi}{5}$ **(C)** $\frac{4\pi}{5}$ **(D)** $\frac{6\pi}{5}$

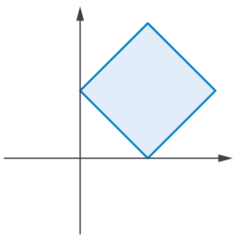
4 Considere o número complexo $z = 2\ \mathrm{cis}\frac{11\pi}{6} - i$.

O módulo de z é igual a:

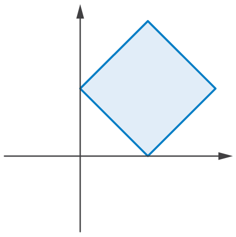
(A) 1 **(B)** $\sqrt{7}$ **(C)** $\sqrt{5}$ **(D)** 3

5 Na figura está representado, no plano complexo, um quadrado cujos vértices são as imagens geométricas de quatro números complexos: z_1, z_2, z_3 e z_4.

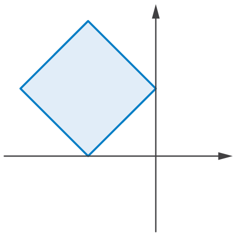
Qual das figuras seguintes pode representar, no plano complexo, o quadrilátero cujos vértices são as imagens geométricas dos números complexos $\overline{iz_1}$, $\overline{iz_2}$, $\overline{iz_3}$ e $\overline{iz_4}$?



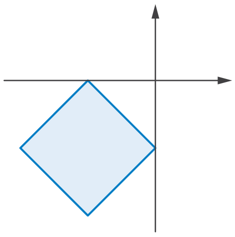
(A)



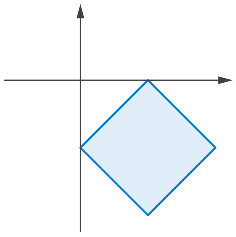
(B)



(C)



(D)



6 Sabe-se que u e v são raízes de índice n de um determinado número complexo z.

Então, pode-se afirmar que:

(A) $\arg(u) = \arg(v)$ **(B)** $z^n = u$ **(C)** $|u| = |v|$ **(D)** $u = -v$

Prova-modelo 1

Grupo I

- **Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.**
- **Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.**
- **Não apresente cálculos nem justificações.**
- **Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.**

Cotações

1. Quantos números naturais pares, com quatro algarismos diferentes, se podem escrever? 5

(A) 2296 **(B)** 2520 **(C)** 2016 **(D)** 3600

2. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis $(A \subset S$ e $B \subset S)$. 5

Sabe-se que $P(A) = 5P(A \cap B)$ e $P(A \cup B) = 2P(B)$.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A \mid B)$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, derivável em todos os pontos do domínio, tal que: 5

- $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = f'(1) = \mathrm{e}$

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) \times \ln[f(x)]$.

O valor de $h'(1)$ é:

(A) e **(B)** $2\mathrm{e}$ **(C)** e^2 **(D)** 0

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(2x)$. 5

A reta de equação $y = 2x + b$ é tangente ao gráfico da função f.

Qual é o valor de b?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** -1

5. Seja f uma função ímpar de domínio $\mathbb{R}$. 5

Sabe-se que a reta de equação $y = -2x + 1$ é uma assíntota do gráfico da função f, quando $x \longrightarrow +\infty$.

O valor de $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} [f(x) + 2x]$ é:

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -2

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA | IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

2.ª Fase

12.° Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.° 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2014

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Cotações

5 **1.** Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}48$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 0,08 **(B)** 0,12 **(C)** 0,2 **(D)** 0,6

5 **2.** Na figura 1 está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

Escolhem-se, ao acaso, três vértices desse octaedro.

Qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$?

(A) $\frac{1}{{}^6C_3}$ **(B)** $\frac{4}{{}^6C_3}$

(C) $\frac{8}{{}^6C_3}$ **(D)** $\frac{12}{{}^6C_3}$

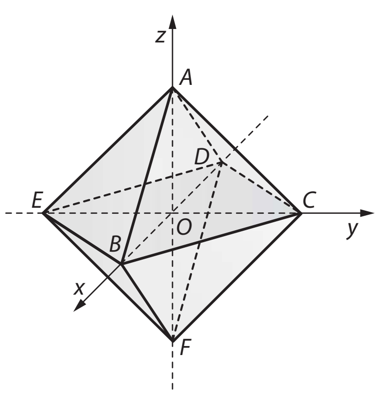


Figura 1

5 **3.** Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x\right)^{10}$, com $x \neq 0$, não depende da variável x.

Qual é esse termo?

(A) 10 240 **(B)** 8064 **(C)** 1024 **(D)** 252

3. Números complexos

1 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + \text{i}$.

1.1. Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w.

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja $z_3 = \text{cis}\,\alpha$.

Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$, sabendo que $z_3 + \bar{z}_2$ é um número real.

2 Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z = 2 + b\text{i}$, com $b < 0$.

Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de z?

(A) $\frac{3}{2}\,\text{cis}(\alpha)$ **(B)** $3\,\text{cis}(-\alpha)$

(C) $3\,\text{cis}(\alpha)$ **(D)** $\frac{3}{2}\,\text{cis}(-\alpha)$

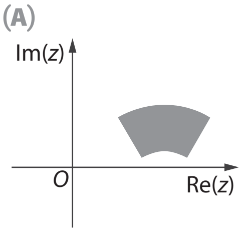
3 Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição:

$$\frac{3}{2} \leqslant |z - 3 + \text{i}| \leqslant 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z - 3 + \text{i}) \leqslant \frac{2\pi}{3}$$

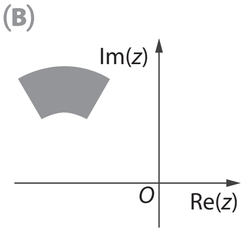
Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$.

Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?

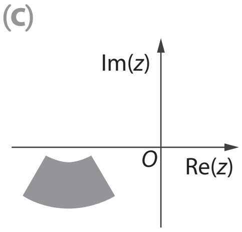
(A)



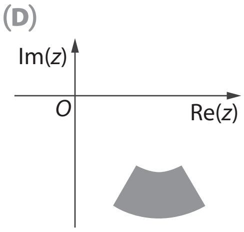
(B)



(C)



(D)



4 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

4.1. Considere $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}\,\text{i}}{2} + \text{i}^{22}$ e $z_2 = \frac{-2}{\text{i}\,z_1}$.

Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

4.2. Seja $\alpha \in [-\pi, \pi[$. Mostre que:

$$\frac{\cos(\pi - \alpha) + \text{i}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha + \text{i}\sin\alpha} = \text{cis}(\pi - 2\alpha)$$

5 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1 + \text{i})^{2013}$.

A qual dos conjuntos seguintes pertence w?

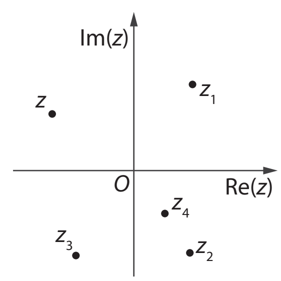
(A) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z - 1|\}$

(B) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \sqrt{2}\}$

(C) $\{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$

(D) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$

6 Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos: z, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Sabe-se que w é um número complexo tal que $z = i \times \bar{w}$.

Qual é o número complexo que pode ser igual a w?

(A) z_4 **(B)** z_3 **(C)** z_2 **(D)** z_1

7 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}\,\text{i}}{1 + 2\,\text{i}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \text{ e } z_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

7.1. Seja $z = \text{cis}\,\theta$, com θ pertencente a $[0, 2\pi[$.

Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.